Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen:
Nils A. Baas 73 59 35 19/20

EKSAMEN I TMA4165 DIFFERENSIALLIGNINGER OG DYNAMISKE SYSTEMER

Bokmål
Tirsdag 7. juni 2005
Tid: 0900-1300

Tillatte hjelpemidler:
- kode D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt (HP30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller XXXXX

Oppgave 1 (Teller som to punkter)

Drøft kort de forskjellige typer likevektspunkter som kan opptre i et 2-dimensjonalt lineært dynamisk system ($\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$ og A er en 2×2 matrise), og skisser faseportrettene rundt disse.

Oppgave 2
Gitt systemet

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x - xy^2 - x^3 \\
\dot{y} &= -7y + 3x^2y - 2yz^2 - y^3 \\
\dot{z} &= -5z + y^2z - z^3
\end{aligned}
$$

a) Vis at origo er et asymptotisk stabilt likevektspunkt.

b) Vis at enhver løsningskurve vil gå mot origo når $t \to +\infty$, uansett hvor den starter.

Oppgave 3

a) Skisser et eksempel på et faseportrett rundt et likevektspunkt med indeks henholdsvis -2, $+1$ og $+3$.

b) Bestem indeksen til likevektspunktet origo for systemet

$$\dot{x} = 2xy$$

$$\dot{y} = 3x^2 - y^2$$

(Vink: Studer retningene til vektorfeltet som systemet definerer.)

Oppgave 4
Undersøk om systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ 2x + y - x(x^2+y^2)^2 \\ \dot{y} &= \ -x + 2y - y(x^2+y^2)^2 \end{aligned}$$

har periodiske løsninger.

Oppgave 5

a) Et dynamisk system er definert i et enkeltsammenhengende område i planet. Forklar hvorfor enhver periodisk bane må omslutte et likevektspunkt.

b) Hva sier teoremet til Poincaré-Bendixson?

c) La $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 |\, \|x\| \leq 1\}$ ($\|\ \|$ er vanlig euklidisk norm) og la $f : D^2 \to D^2$ være en C^1-funksjon. Vis at f har et fikspunkt (dvs. det finnes en x slik at $f(x) = x$).

(Vink: Se for eksempel på vektorfeltet definert ved $g(x) = f(x) - x$.)

Oppgave 6
Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ x - y \\ \dot{y} &= \ 1 - xy \end{aligned}$$

Bestem likevektspunktene og deres type. Skissér fasediagrammet.

Oppgave 7

a) La $d \in < 2, 3 >$. Angi konstruksjonen av en delmengde i $\mathbb{R}^3$ slik at denne har fraktaldimensjon lik d.

b) Bestem fraktaldimensjonen av mengden

$$F = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots\right\} \subset [0, 1]$$