Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Nils A. Baas (735) 93519/20

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I TMA4165 DIFFERENSIALLIGNINGER OG DYNAMISKE SYSTEMER

Bokmål
Mandag 29. mai 2006
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
- kode D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt (HP30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller 19. juni 2006.

Oppgave 1

a) *Avgjør om følgende system er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt i origo:*

$$\dot{x} = e^{-x-3y} - 1,$$
$$\dot{y} = x(1 - y^2).$$

Vi kan skrive systemet over på formen

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{-x-3y} - 1 \\ x(1 - y^2) \end{bmatrix}.$$

Det gir at Jacobimatrisen til $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ er gitt ved

$$J(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} -e^{-x-3y} & -3e^{-x-3y} \\ 1-y^2 & -2xy \end{bmatrix}$$

slik at lineariserer vi om origo får vi at

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = J(\mathbf{f})(\mathbf{0}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Sett $A = J(\mathbf{f})(\mathbf{0})$. Enkel regning gir så at A har egenverdierlik $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$. Altså er origo i det lineære systemet en stabil sprial. Ved Hartman-Grobmans teorem er da origo i det ikke-lineære systemet asymptotisk stabil.

b) *Bestem likevektspunktene til systemet*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x^2 - 1. \end{aligned}$$

Likevektspunktene finner vi der $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Altså

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ x^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

det vil si at $x = y$ og $x = \pm 1$. Med andre ord har vi likevekt i punktene $(1,1)$ og $(-1,-1)$.

Bestem videre deres lineære og ikke-lineære type, og skisser faseportrettet.

Vi skriver om system på formen

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Jacobmatrisen til systemet, $J(\mathbf{f})$, er da gitt ved

$$J(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}.$$

Lineariserer vi så om $(1,1)$ får vi at

$$A_{(1,1)} = J(\mathbf{f})(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

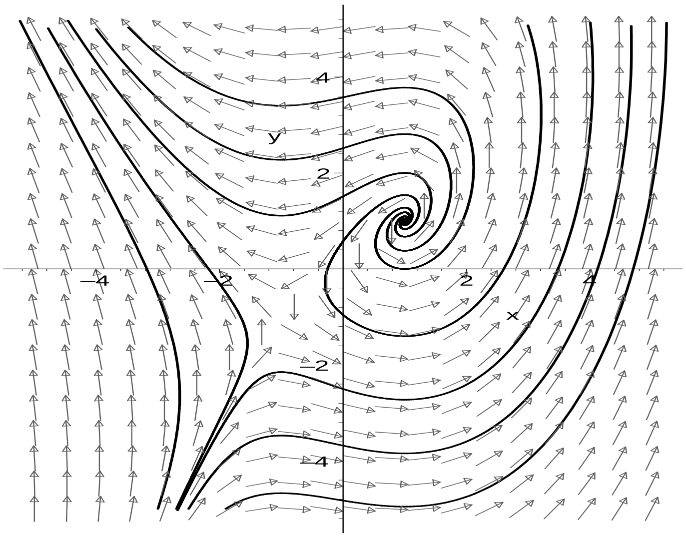
Enkel regning gir så at $A_{(1,1)}$ har egenverdier lik $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$, altså er $(1,1)$ i det lineariserte systemet en ustabil spiral. Ved Hartman-Grobmans teorem er $(1,1)$ også en ustabil sprial i det ikke-lineære systemet.

Lineariserer vi om $(-1,-1)$ får vi at

$$A_{(-1,-1)} = J(\mathbf{f})(-1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enkel regning gir så at $A_{(-1,-1)}$ har egenverdier lik -1 og 2. Altså er $(-1,-1)$ i det lineære systemet et sadelpunkt. Ved Hartman-Grobmans teorem er $(-1,-1)$ også et sadelpunkt i det ikke-lineære systemet.

En skisse av fasediagrammet er gjengitt i figur 1.



Figur 1: Faseplott for $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x^2 - 1$

Fins det en periodisk bane som omslutter alle likeveektspunktene?

For at det skal finnes en periodisk bane Γ som omslutter alle likvektspunktene må

$$I_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} I(P_i) = +1$$

der P_i er likevektspunkt for systemet for $i = 1, \ldots, n$. I vårt tilfelle har vi kun to likvektspunkt, $(1,1)$ og $(-1,-1)$. Det første likevektspunktet er en ustabil spiral som vi vet har indeks lik $+1$. Det andre likevektspunktet er et sadelpunkt som vi vet har indeks lik -1. Altså har vi

$$I_\Gamma = I(1,1) + I(-1,-1) = 1 - 1 = 0 \neq +1$$

og dermed finnes det ingen periodisk bane Γ som omslutter begge likevektspunktene.

Hva er indeksen i uendelig?

Fra Teorem 3.4, side 102 i Jordan & Smith, har vi at indeksen i uendelig er

$$I_\infty = 2 - \sum_{i=1}^{n} I(P_i) = 2 - 0 = 2.$$

Oppgave 2

a) *Avgjør om null-løsningen til differensialligningen*

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = \ddot{x}(x + \dot{x})$$

er stabil, asymptotisk stabil eller ustabil.

Vi setter differensialligningen over på systemform, det vil si

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= z, \\
\dot{z} &= \dddot{x} = -2x + y + 2z + z(x + y).
\end{aligned}$$

Jacobimatrisen til systemet, $J(\mathbf{f})$, er så gitt ved

$$J(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 + z & 1 + z & 2 + x + y \end{bmatrix}.$$

Lineariserer vi så om origo får vi at

$$A = J(\mathbf{f})(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ser så på $\det(A - \lambda I) = 0$, det vil si

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda\left(-\lambda(2 - \lambda) - 1\right) - \left(0 \cdot (2 - \lambda) + 2\right) \\
&= \lambda^2(2 - \lambda) + \lambda - 2 \\
&= (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) \\
&= (\lambda - 2)(1 - \lambda)(1 + \lambda) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Altså har A egenverdier lik $-1, 1$ og 2. Ved Hartman-Grobmans teorem har vi da at origo i det ikke-lineære systemet er et ustabilt likevektspunkt.

b) *Har differensialligningen*

$$\ddot{x} + x\dot{x} + x^3 = 0$$

periodiske løsninger?

Vi skriver differensialligningen over på systemform, det vil si

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -x^3 - xy.$$

Altså har vi at $\dot{y} = -g(x) - f(x)y$ der $g(x) = x^3$ og $f(x) = x$. Teorem 11.3, side 404-405 i Jordan & Smith, sier at origo er et senter dersom, i en *omegn* om origo f og g er kontinuerlige og

(i) $f(x)$ er odde, og av ett fortegn i halvplanet $x > 0$,

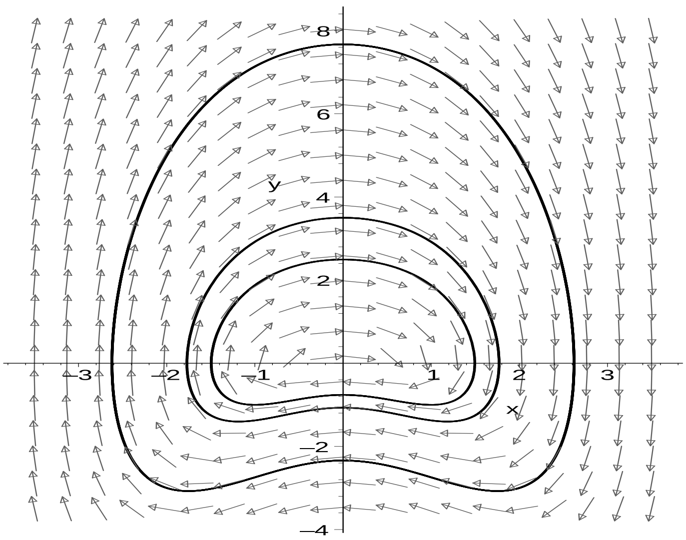
(ii) $g(x) > 0$ for $x > 0$, og $g(x)$ er odde (som dermed impliserer at $g(0) = 0$)

(iii) $g(x) > \alpha f(x)F(x)$ for $x > 0$, der $F(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ og $\alpha > 1$.

Punkt (i) og (ii) er opplagt oppfylt. I vårt tilfelle er $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ slik at

$$g(x) - \alpha f(x)F(x) = x^3 - \frac{\alpha}{2}x^3 = \frac{1}{2}x^3(2 - \alpha) > 0$$

for $1 < \alpha < 2$. Dermed er også (iii) oppfylt og origo er følgelig et senter, som igjen vil si at differensialligningen gitt i oppgaven har peridoiske løsninger. En skisse av fasediagrammet til systemet er gjengitt i figur 2.



Figur 2: Faseplott for $\ddot{x} + x\dot{x} + x^3 = 0$

Oppgave 3 *Skisser faseportrettet rundt en likevektstilstand slik at indeksen blir*

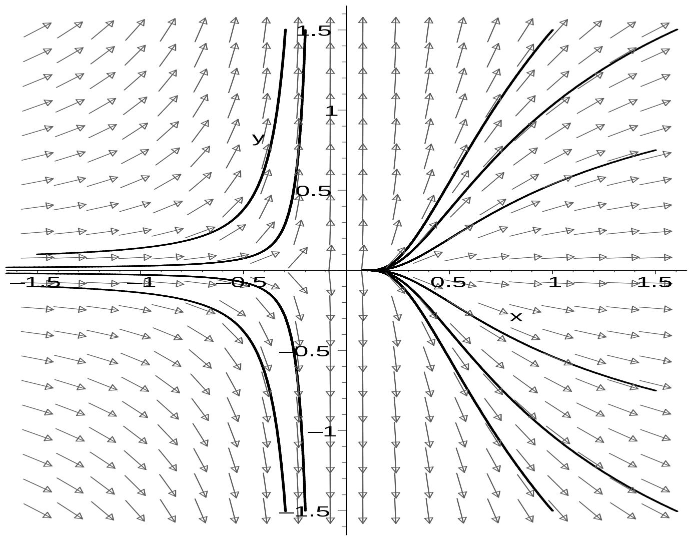
$$i)\ 0, \qquad ii)\ +3, \qquad iii)\ -3.$$

Indeksen rundt en likevektstilstand kan bestemmes ved hjelp av Bendixsons teorem (se Perko, side 305), som sier at indeksen er gitt ved

$$I = 1 + \frac{e-h}{2}$$

der e er antall *elliptiske sektorer* og h er antall *hyperbolske sektorer* rundt likevektstilstanden.

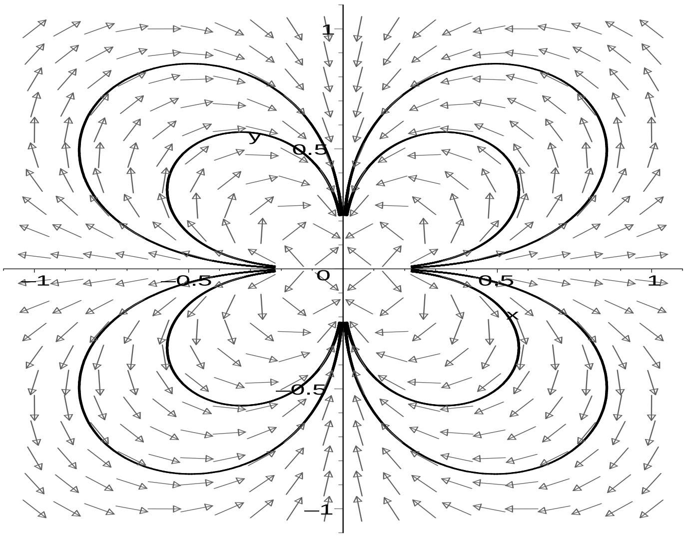
i) Et mulig eksempel er gjengitt i figur 3.



Figur 3: Faseplott av en likevektstilstand med indeks lik 0

Her er $e = 0$ og $h = 2$ slik at ved Bendixsons teorem er $I = 0$.

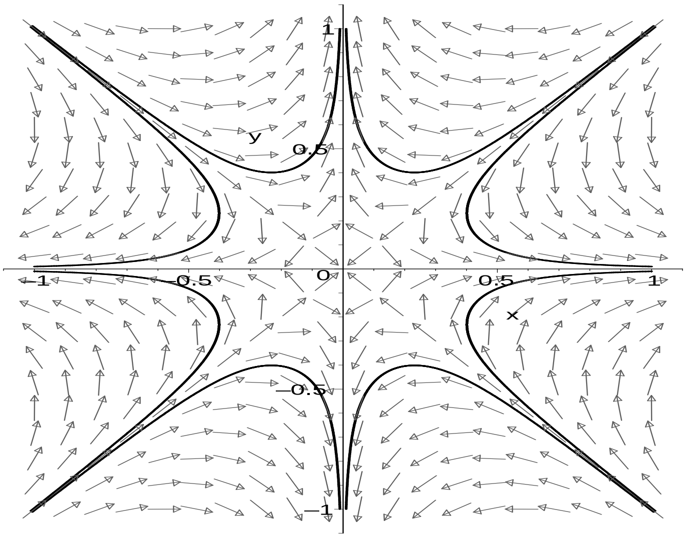
ii) Et mulig eksempel er gjengitt i figur 4.



Figur 4: Faseplott av en likevektstilstand med indeks lik +3

Her er $e = 4$ og $h = 0$ slik at ved Bendixsons teorem er $I = +3$.

iii) Et mulig eksempel er gjengitt i figur 5.



Figur 5: Faseplott av en likevektstilstand med indeks lik −3

Her er $e = 0$ og $h = 8$ slik at ved Bendixsons teorem er $I = -3$.

Oppgave 4 *Gitt*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xz^2,\\ \dot{y} &= x + yz^2,\\ \dot{z} &= -z(x^2+y^2).\end{aligned}$$

a) *Avgjør om origo er et stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt likevektspunkt.*

La $V(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$. Da får vi at

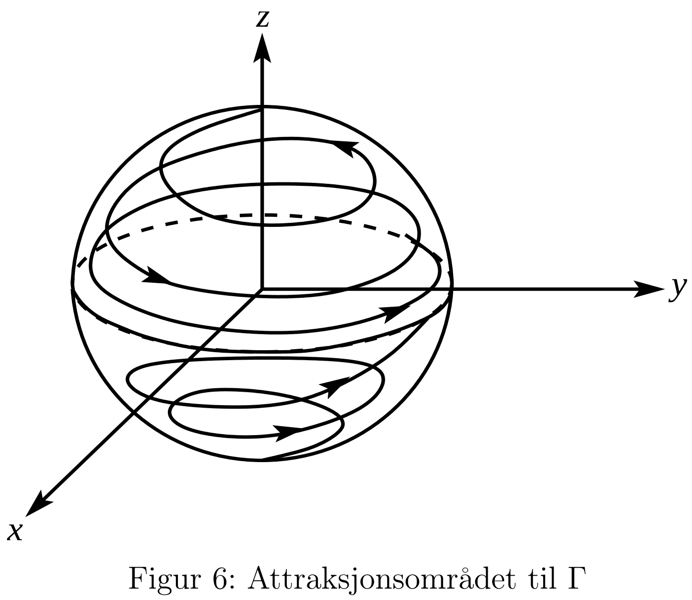
$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y,z) &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\\ &= -xy + x^2z^2 + xy + y^2z^2 - z^2(x^2+y^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

for alle $x, y, z \in \mathbf{R}$. Altså ligger banene på kuleflatene $x^2+y^2+z^2 = c^2$ der $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funksjonen $V(x,y,z)$ tilfredstiller alle kravene til en Liapunovfunksjon, og fra Teorem 10.5, side 355-356 i Jordan & Smith, har vi dermed at origo er et stabilt likevektspunkt, men *ikke* asymptotisk stabilt.

b) *En periodisk bane Γ er gitt ved $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Hva er attraksjonsområdet til Γ? (Det vil si alle punkter i $\mathbf{R}^3$ som går mot Γ når tiden går mot uendelig.) Gi en grov skisse av situasjonen.*

Banen Γ ligger på kuleflaten $x^2+y^2+z^2 = 1$ (med andre ord enhetssfæren i $\mathbf{R}^3$, ofte betegnet $\mathbf{S}^2$). Videre har vi at $\dot{z} < 0$ utenom z-aksen som består av likevektstilstander. Derfor vil enhver bane som starter utenfor nord- og sørpolen, altså $(0,0,1)$ og $(0,0,-1)$ gå mot Γ. Altså er attraksjonsområdet til Γ gitt som $\mathbf{S}^2 \setminus \{(0,0,\pm1)\}$.

En grov skisse av situasjonen er gjengitt i figur 6.



Figur 6: Attraksjonsområdet til Γ

Oppgave 5

a) *Vis at systemet*

$$\dot{x} = x - y - x^3,$$
$$\dot{y} = x + y - y^3$$

har en periodisk bane i det ringformede området i planet

$$A_{a,b} = \{(x, y) \subseteq \mathbf{R}^2 \mid a \leq x^2 + y^2 \leq b, \text{ hvor } 0 < a < 1 \text{ og } b > 2\}.$$

En kan anta at $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ikke har noen løsning i $A_{a,b}$.

Sett $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Da får vi at

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = x^2 + y^2 - (x^4 + y^4).$$

Dersom $x^2 + y^2 < 1$ har vi at

$$x^2 + y^2 > (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 > x^4 + y^4$$

slik at i dette området er $\dot{V}(x, y) > 0$. Dersom $x^2 + y^2 > 2$ har vi

$$2(x^2 + y^2) < (x^2 + y^2)^2 = x^4 + +2x^2y^2 + y^4 \leq 2(x^4 + y^4)$$

slik at $\dot{V}(x, y) < 0$.

Altså har vi vist at området $A_{a,b}$ er invariant. Ettersom det ikke inneholder noen likevektspunkter gir Poincaré-Bendixson teoremet at det eksisterer en periodisk bane i området.

b) *Betrakt systemet i **a)** for området $A_{\frac{3}{4},3}$. Forklar hvorfor resultatet i **a)** i dette tilfellet ikke strider mot Bendixsons negative kriterium.*

Vi har at

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 1 - 3x^2 + 1 - 3y^2 = 2 - 3(x^2 + y^2) < 0$$

i $A_{\frac{3}{4},3}$. Da området ikke er *enkeltsammenhengende* gjelder ikke Bendixsons negative kriterium, og kriteriet utelukker ikke eksistensen av banen vi fant i oppgave **a)**.

Oppgave 6 *Konstruer en delmengde av planet ($\mathbf{R}^2$) slik at dens fraktaldimensjon blir $\sqrt{3}$.*

La S_1, S_2, S_3 og S_4 være en ikke-overlappende mengde av similituder i $\mathbf{R}^2$. Da er fraktaldimensjonen d av den assosierte attraktoren gitt ved

$$\sum_{i=1}^{4} s_i^d = 1$$

der s_i er kontraksjonsfaktoren til S_i. Velg så $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = k$. Gitt $d = \sqrt{3}$, så har vi at kontraksjonsfaktoren er

$$4k^{\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4^{1/\sqrt{3}}} \approx 0,4492.$$

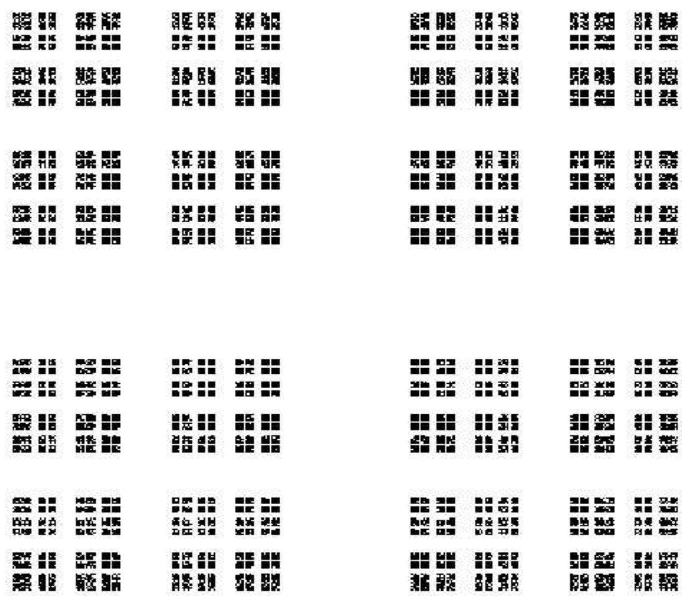
En alternativ løsning er å bruke et iterert funksjons-system (IFS) med fire kontraksjoner, alle med samme kontraksjonsfaktor. Benevn denne faktoren k. Vi får da sammenhengen

$$4k^{\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 4^{-1/\sqrt{3}} \approx 0,4492.$$

La IFSen bestå av avbildningene $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Disse kan eksempelvis være gitt ved

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\
w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-k \\ 0 \end{bmatrix}, \\
w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1-k \end{bmatrix}, \\
w_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-k \\ 1-k \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Attraktoren A til $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ vil nå ha dimensjon $\sqrt{3}$ ved Teorem 8 i fraktalnotatet. Se figur 7 for en illustrasjon.



Figur 7: Attraktoren en får ved metoden skissert over

Oppgave 7

a) *Definer begrepet kaotisk avbildning (eller kaotisk diskret dynamisk system).*

La J betegne et intervall (mer generelt et topologisk rom). Da sier vi at $f : J \to J$

(1) er *sensitivt* uavhengig av initialdata dersom det eksisterer en $\delta > 0$ slik at for hver $x \in J$ og omegn N_x om x finnes $y \in N_x$ og $k > 0$ slik at $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$,

(2) er *transitiv* dersom det for alle åpne ikketomme mengder $U, V \subseteq J$ eksisterer et positivt heltall k slik at $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$,

(3) sine *periodiske punkter* ligger *tett* dersom tillukningen av de periodiske punktene til f er J.

(Et punkt $x_0 \in J$ kalles *periodisk* dersom det finnes $k \geq 1$ slik at $f^k(x_0) = x_0$.)

En avbildning $f : J \to J$ som tilfredstiller alle tre kravene over kalles *kaotisk*.

b) *La $\mathbf{S}^1$ være enhetssirkelen i det komplekse plan. Vis at avbildningen*

$$f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$$

gitt ved $f(z) = z^2$ ($z = e^{i\theta}$) er kaotisk.

Representerer vi z med θ så gjelder $f(\theta) = 2\theta$.

(1) Det er klart at f er *sensitiv* ettersom avstanden dobles i hver iterasjon.

(2) Ettersom $f^n(U)$ vil dekke hele $\mathbf{S}^1$ for n stor nok for en åpen ikketom delmengde $U \subseteq \mathbf{S}^1$, er det klart at f også er *transitiv*.

(3) Hvis θ er et periodisk punkt eksisterer det en m slik at $f^m(\theta) = \theta + 2k\pi$ der k er et heltall. Det vil si

$$\begin{aligned} f^m(\theta) &= \theta + 2k\pi \\ 2^m\theta &= \theta + 2k\pi \\ \theta &= \frac{2k\pi}{2^m - 1}. \end{aligned}$$

Altså er θ en $2^m - 1$ enhetsrot, og disse ligger vilkårlig tett når m blir stor nok. Dermed har vi at de periodiske punktene til f ligger tett.

Altså har vi vist at

$$\begin{aligned} f : \mathbf{S}^1 &\to \mathbf{S}^1 \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

er kaotisk.