Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Nils A. Baas (735) 93519/20

EKSAMEN I TMA4165 DIFFERENSIALLIGNINGER OG DYNAMISKE SYSTEMER

Bokmål
Mandag 29. mai 2006
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
- kode D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt (HP30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller 19. juni 2006.

Oppgave 1

a) Avgjør om følgende system er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt i origo:

$$\dot{x} = e^{-x-3y} - 1,$$
$$\dot{y} = x(1 - y^2).$$

b) Bestem likevektspunktene til systemet

$$\dot{x} = x - y,$$
$$\dot{y} = x^2 - 1.$$

Bestem videre deres lineære og ikke-lineære type, og skisser faseportrettet.

Fins det en periodisk bane som omslutter alle likevektspunktene?

Hva er indeksen i uendelig?

Oppgave 2

a) Avgjør om null-løsningen til differensialligningen

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = \ddot{x}(x + \dot{x})$$

er stabil, asymptotisk stabil eller ustabil.

b) Har differensialligningen

$$\ddot{x} + x\dot{x} + x^3 = 0$$

periodiske løsninger?

Oppgave 3 Skisser faseportrettet rundt en likevektstilstand slik at indeksen blir

i) 0, ii) $+3$, iii) -3.

Oppgave 4 Gitt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xz^2, \\ \dot{y} &= x + yz^2, \\ \dot{z} &= -z(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

a) Avgjør om origo er et stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt likevektspunkt.

b) En periodisk bane Γ er gitt ved $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Hva er attraksjonsområdet til Γ? (Det vil si alle punkter i $\mathbf{R}^3$ som går mot Γ når tiden går mot uendelig.) Gi en grov skisse av situasjonen.

Oppgave 5

a) Vis at systemet

$$\dot{x} = x - y - x^3,$$
$$\dot{y} = x + y - y^3$$

har en periodisk bane i det ringformede området i planet

$$A_{a,b} = \{(x, y) \subseteq \mathbf{R}^2 \mid a \leq x^2 + y^2 \leq b, \text{ hvor } 0 < a < 1 \text{ og } b > 2\}.$$

En kan anta at $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ikke har noen løsning i $A_{a,b}$.

b) Betrakt systemet i **a)** for området $A_{\frac{3}{4},3}$. Forklar hvorfor resultatet i **a)** i dette tilfellet ikke strider mot Bendixsons negative kriterium.

Oppgave 6 Konstruer en delmengde av planet ($\mathbf{R}^2$) slik at dens fraktaldimensjon blir $\sqrt{3}$.

Oppgave 7

a) Definer begrepet kaotisk avbildning (eller kaotisk diskret dynamisk system).

b) La $\mathbf{S}^1$ være enhetssirkelen i det komplekse plan. Vis at avbildningen

$$f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$$

gitt ved $f(z) = z^2$ $(z = e^{i\theta})$ er kaotisk.