TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer 2007–05–25

Løsningsforslag

Merk at dette løsningsforslaget ikke er grundig kontrollregnet og korrekturlest ennå, så feil kan forekomme. (Tekst i liten skrift, som her, er kommentarer og ikke en del av selve løsningsforslaget.)

Problem 1

a) Matrisen til lineariseringen i origo er $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, som har egenverdier ± 1. Punktet er et sadelpunkt, og derfor ustabilt. (Tilstrekkelig å observere at en egenverdi er positiv.)

b) Matrisen til lineariseringen i origo er $\left(\begin{smallmatrix}-1 & -1\\ 1 & -2\end{smallmatrix}\right)$, som har egenverdier $-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Punktet er et stabilt fokus, og derfor asymptotisk stabilt. (Det er tilstrekkelig å bemerke at matrisen har trase $p = -3 < 0$ og determinant $q = 3 > 0$.)

c) Liapunovfunksjonen $V = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ gir $\dot V = x\dot x + 2y\dot y = 0$. Likevektspunktet er stabilt men ikke asymptotisk stabilt.

Alternativt merker man seg at høyresidene i systemet har en felles faktor $1 + x$. Etter divisjon med $1 + x$ slutter vi at banene nær origo er de samme som banene til systemet $\dot x = -2y$, $\dot y = x$ som er et lineært senter.

Siden lineariseringen er et senter, er det ikke nok å utnytte bare den.

d) Liapunovfunksjonen $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ gir

$$\dot V = x\dot x + y\dot y + z\dot z = -x^4 - x^8y^2z^{10} - y^6 - y^2z^4 - z^8 - x^2y^4z^6 < 0$$

for $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, så likevektspunktet er asymptotisk stabilt.

Leddene x^2y fra $\dot x$ og $-x^3$ fra $\dot y$ bidrar med henholdsvis x^3y og $-x^3y$, så de kansellerer. Heldigvis.

e) Liapunovfunksjonen $V = xy$ gir $\dot V = \dot xy + x\dot y = x^3y^3$ slik at $\dot V > 0$ der hvor $V > 0$. Siden $V(0,0) = 0$ og hver omegn om $(0,0)$ inneholder et punkt hvor $V > 0$, er likevektspunktet ustabilt.

Problem 2

a) Med $X = y - \frac{3}{4}x$ og $Y = x - x^3 + \frac{3}{4}y$ blir $\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y = 0$, så systemet er Hamiltonsk (siden vi arbeider i hele planet, som er enkeltsammenhengende).

Vi skal ha $\partial H/\partial y = X = y - \frac{3}{4}x$, som integreres til $H = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}xy + h(x)$. Setter vi dette inn i $\partial H/\partial x = -Y = -x + x^3 - \frac{3}{4}y$, får vi $h'(x) = -x + x^3$, så vi setter $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. Altså

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{4}xy - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Siden vi har funnet en Hamiltonfunksjon for systemet, er det ikke nødvendig å vise abstrakt at systemet er Hamiltonsk. Men hvis man ikke vet, vil det være et naturlig første skritt.

b) I et likevektspunkt blir $y = \frac{3}{4}x$ og $x - x^3 + \frac{3}{4}y = 0$. Vi setter den første av disse likningene inn i den andre og får $\frac{25}{16}x - x^3 = 0$, altså $x = 0$ eller $x = \pm\frac{5}{4}$. Likevektspunktene er altså $(0,0)$ og $\pm\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{16}\right)$.

Disse er også kritiske punkter for H, og vi kan klassifisere dem ved å betrakte Hessematrisen til H:

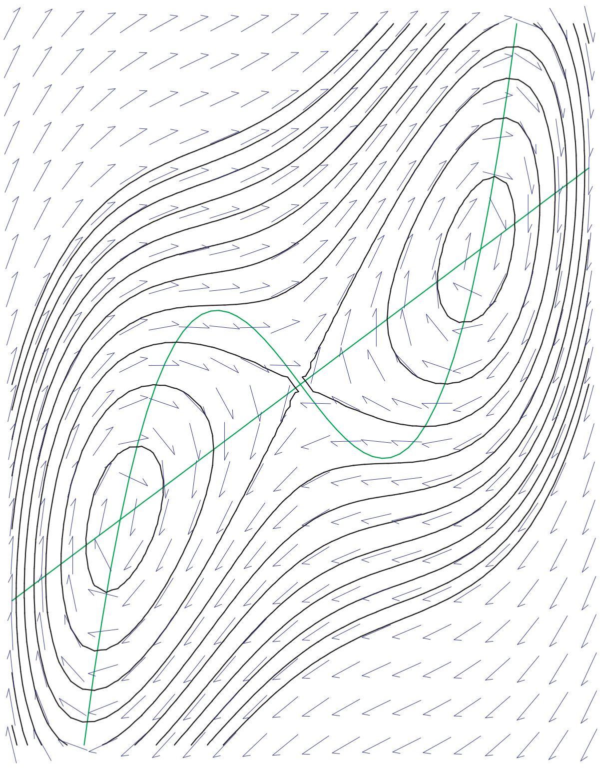
$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten til denne blir $\det H^{(2)} = 3x^2 - \frac{25}{16}$ som er negativ for $x = 0$ og positiv for $x = \pm\frac{5}{4}$.

Likevektspunktet i $(0,0)$ er et sadelpunkt for H, og derfor også et sadelpunkt for det dynamiske systemet.

Likevektspunktene i $\pm\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{16}\right)$ er minimumspunkter for H, og derfor sentre for det dynamiske systemet.

c) For fasediagrammet er det nyttig å huske at banene går i negativ omløpsretning rundt et minimumspunkt for Hamiltonfunksjonen. Det er også nyttig å merke seg isoklinene: $\dot{x} = 0$ langs den rette linjen $y = \frac{3}{4}x$ og $\dot{y} = 0$ langs tredjegradskurven $x - x^3 + \frac{3}{4}y = 0$.



Det ville også vært nyttig å finne egenvektorene til lineariseringen i origo, men regningen blir litt stygg så vi lar det være. Med hjelp av isoklinene og retningen til vektorfeltet på disse kan man likevel få en brukbar idé om den tilnærmede retningen på disse.

Endelig er det nyttig å se at $H \to \infty$ når $x^2 + y^2 \to \infty$, siden dette viser at alle baner blir begrensede (og faktisk lukkede, med unntak av de to homokline banene som svarer til nivåkurven $H = 0$). Dette er ikke *helt* opplagt. Vi kan rydde kryssleddet av veien først: Siden $0 \le (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, er $xy \ge -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Setter vi dette inn i formelen for H, får vi $H(x, y) \ge \frac{1}{8}y^2 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. Når $x^2 + y^2$ er stor har vi to muligheter: Enten er $\frac{1}{4}x^4 > x^2$ som gir $H > \frac{1}{8}(x^2 + y^2)$, eller så er $x^2 \le 4$ så $H > \frac{1}{8}y^2 - \frac{7}{2}$, som blir stor siden y^2 må være stor i dette tilfellet.

I figuren er de to isoklinene markert i grønt (merk at de krysser hverandre i likevektspunktene). For ikke å overlesse figuren er aksene utelatt. Origo er i sentrum.

Problem 3

a) Figuren i A kan ikke være et likevektspunkt, fordi det totale antallet sektorer (hyperbolske pluss elliptiske) er odde. (Man kan også se direkte at et forsøk på å gi konsistente retninger på banene vil slå feil.)

Figuren i B kan derimot være et likevektspunkt. Det er $h = 3$ hyperbolske sektorer og $e = 1$ elliptisk sektor. Bendixsons indeksformel gir indeksen

$$I = 1 + \frac{e - h}{2} = 0.$$

b) En lukket bane har alltid indeks lik 1, så summen av indeksene til alle likevektspunkter innenfor banen må være 1. Siden likevektspunktet ovenfor har indeks 0, kan det likevektspunktet ikke være eneste likevektspunkt innenfor en lukket bane.

Problem 4

Dette er en Liénardlikning $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ der f er en like funksjon og g er odde. Dette impliserer at $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$ er odde. Vi ser at $f(x) < 0$ når $0 < x < 3^{1/4}$ og $f(x) > 0$ når $x > 3^{1/4}$, så $F(x) < 0$ når $0 < x < 3^{1/4}$ mens F er strengt voksende for $x > 3^{1/4}$. For store x er $f(x) \sim x^2$, så $F(x) \to \infty$ når $x \to \infty$. Vi finner ikke noe uttrykk for det entydige $a > 0$ der $F(a) = 0$, men det er klart at a eksisterer. Endelig er $g(x) > 0$ for $x > 0$. Dermed har vi alle krav oppfylt for eksistensen av en entydig grensesykel for Liénardlikninger.

Problem 5

La det opprinnelig kvadratet ha sidekant av lengde L. Den gitte fraktalen kan beskrives ved fire similituder som avbilder det store kvadratet ned på hvert sitt av de gitte fire småkvadratene. Hvert småkvadrat har sidekant $\frac{1}{4}\sqrt{2}L$, så hver similitude har en kontraksjonsfaktor lik $\frac{1}{4}\sqrt{2}$. Vi kan se direkte fra figuren i oppgaven at similitudene er ikke-overlappende. Fraktaldimensjonen D finnes derfor fra formelen

$$4\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right)^D = 1.$$

Tar vi logaritmen her får vi $2\ln 2 + D\left(-\frac{3}{2}\right)\ln 2 = 0$, som gir at fraktaldimensjonen er $D = \frac{4}{3}$.