TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer 2008–06–05

Løsningsforslag

Oppgave 1

Vi skriver opp

$$\begin{aligned} x\dot{x} &= -2x^2 + xy - 2xyz \\ y\dot{y} &= -2xy - y^2 + 2xyz - xyz^2 \\ z\dot{z} &= 3xyz^2 - z^6 + 6xyz \end{aligned}$$

og ser etter en lineærkombinasjon med positive koeffisienter med kun kvadratisk ledd. Vi ser raskt at alle problematiske ledd (xy, xyz, xyz^2) forsvinner om vi velger koeffisientene i lineærkombinasjonen lik 6, 3, 1.

Det følger at $V(x,y,z) = \frac{1}{2}(6x^2 + 3y^2 + z^2)$ blir en Liapunovfunksjon, med $\dot{V}(x,y,z) = -12x^2 - 3y^2 - z^6 < 0$ for $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

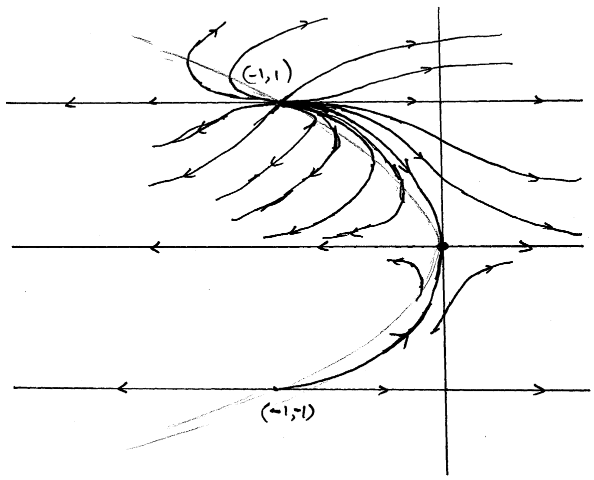
Oppgave 2

a. $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y \in \{0, \pm 1\}$, og $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = -y^2$ gir de tre likevektspunktene $\{(0,0), (-1,\pm 1)\}$.

I likevektspunktet $(0,0)$ blir Jacobimatrisen til høyresiden $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, så egenverdiene er ± 1 og lineariseringen er et sadelpunkt. Det følger at $(0,0)$ er et sadelpunkt. (Det er vanlig å sitere Hartman–Grobman her, men det teoremet er ikke kraftig nok. Resultatet er likevel riktig.)

Til bruk for skissen av fasediagrammet merker vi oss også at den ustabile kurven tangerer punktet langs egenrommet til egenverdien $+1$, altså x-aksen, og den stabile kurven tangerer langs det andre egenrommet, i dette tilfellet y-aksen.

I likevektspunktene $(-1,\pm 1)$ blir Jacobimatrisen til høyresiden $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \pm 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, så egenverdiene er 1 og 2, og lineariseringen er en ustabil node. Det samme gjelder da for det fulle systemet. (Igjen er ikke Hartman–Grobman tilstrekkelig, men teoremet til Grobman holder til formålet.)



Fasediagrammet er symmetrisk om x-aksen. Detaljer er utelatt i nedre del for å vise stabile kurven for sadelpunktet tydeligere.

For fasediagrammet er det også hendig å merke seg egenvektorene: For egenverdien 1 finner vi egenvektoren $(1,0)$, så de fleste fasekurvene som forlater punktet gjør det parallelt med x-aksen. For egenverdien 2 finner vi egenvektoren $(2,\pm 1)$.

Det er også nyttig å notere at systemet er invariant under symmetrien som erstatter y med $-y$, for ikke å snakke om den nokså trivielle observasjonen at y-ligningen ikke inneholder x, og de tre linjene $y = 0$ og $y = \pm 1$ er invariante.

b. Divergensen til høyresiden er $3y^2 > 0$, for $y \neq 0$, så systemet har ingen ikke-konstante periodiske løsninger ved Bendixsons negative kriterium.

Alternativt merker vi oss at siden $y = 0$ eller $y \to \pm 1$ når $t \to \infty$ for alle løsninger, så må enhver periodisk løsning ha $y = 0$ eller $y = \pm 1$. Med y konstant vil også ligningen $\dot{x} = x + y^2$ bare ha konstante periodiske løsninger.

Oppgave 3

Systemet er lineært, med matrise

$$A = \begin{pmatrix} -1-\mu & 1 \\ -1 & -1+\mu \end{pmatrix}.$$

Vi finner

$$p = \operatorname{tr} A = -2, \quad q = \det A = 2 - \mu^2, \quad \Delta = p^2 - 4q = 4(\mu^2 - 1).$$

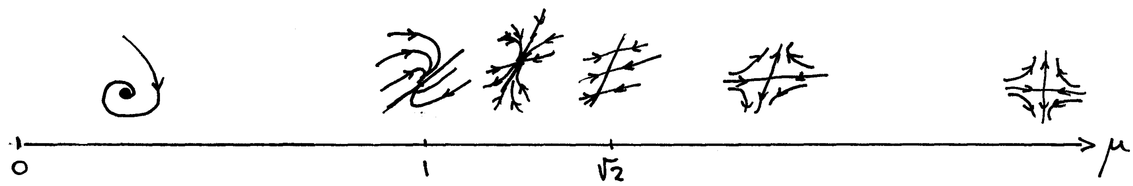
Egenverdiene er $\lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$, som vi skriver $\lambda_\pm = -1 \pm i\sqrt{1-\mu^2}$ når $|\mu| < 1$. Tilhørende egenvektor blir $v_\pm = \left(1, \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}\right)$.

Vi konkluderer at systemet er stabilt når $q > 0$, det vil si $|\mu| < \sqrt{2}$, og ustabilt (et sadelpunkt) når $q < 0$, det vil si $|\mu| > \sqrt{2}$.

Vi kan oppsummere analysen så langt i en tabell:

	egenverdier	type
$\|\mu\| < 1$	$-1 \pm i\sqrt{1-\mu^2}$	stabilt fokus
$\|\mu\| = 1$	-1	degenerert stabil node
$1 < \|\mu\| < \sqrt{2}$	$-1 \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$	stabil node
$\|\mu\| = \sqrt{2}$	$0, -2$	degenerert
$\sqrt{2} < \|\mu\|$	$-1 \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$	sadelpunkt

Vi sparer en del arbeid ved å legge merke til at systemet er uendret om vi bytter ut x med y og y med $-x$, og samtidig erstatter μ med $-\mu$. Vi trenger altså bare analysere tilfellet $\mu \geq 0$ i detalj.



Fra venstre mot høyre ser vi altså først et fokus, for $0 \leq \mu < 1$.

Deretter en degenerert stabil node for $\mu = 1$, egenverdi 1 og endimensjonalt egenrom utspent av vektoren $(1, 1)$.

Så har vi noder for $1 < \mu < \sqrt{2}$.

Deretter kommer en degenerert situasjon for $\mu = \sqrt{2}$. En egenverdi er 0, og det tilhørende egenrommet utspent av $(1, 1+\sqrt{2})$ består av likevektspunkter. All bevegelse går parallelt med det andre egenrommet, utspent av $(1, -1+\sqrt{2})$ inn mot det første.

Til sist får vi sadelpunkt for $\mu > \sqrt{2}$. Ytterst til høyre er antydet grensen når $\mu \to \infty$.

Oppgave 4

a. Vi kan vise at systemet på formen $\dot{x} = X$, $\dot{y} = Y$ er Hamiltonsk ved å verifisere at $\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y = 0$, men når vi vet at det skal være Hamiltonsk er det like greit å prøve å finne en Hamiltonfunksjon direkte.

$\partial H/\partial y = X = 2y(1+e^{-x})$ gir $H = y^2(1+e^{-x}) + f(x)$.

$\partial H/\partial x = -Y = -e^{-x}(y^2-1)$ gir $H = e^{-x}(y^2-1) + g(y)$.

Skal begge deler holde må $y^2 + f(x) = -e^{-x} + g(y)$, som passer bra med $f(x) = -e^{-x}$ og $g(y) = y^2$. Trekker vi fra konstanten 1 kan vi skrive en Hamiltonfunksjon på den tiltalende formen

$$H(x,y) = (1+e^{-x})(y^2-1).$$

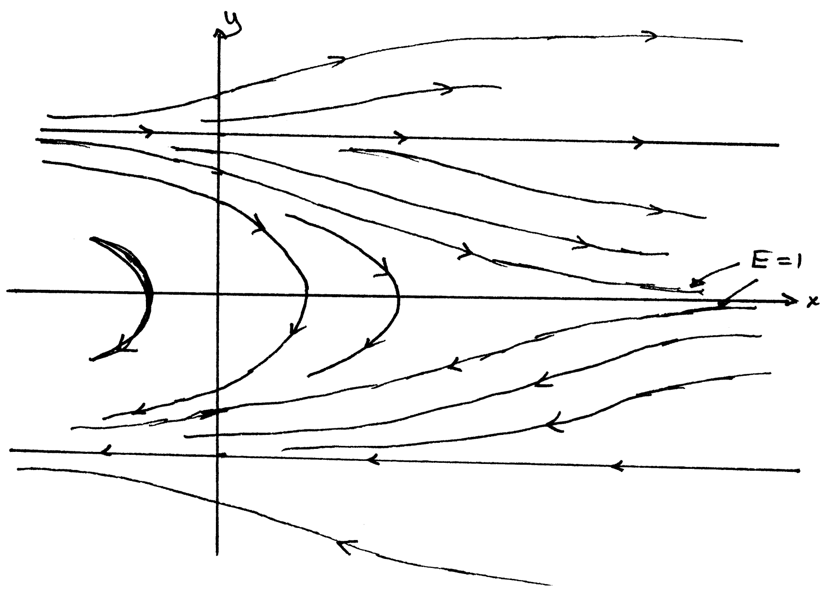
b. Husk at fasekurvene følger nivåkurvene til H. Spesielt interessant er de to linjene $y = \pm 1$, der $H = 0$. Vi har også symmetrien $H(x,-y) = H(x,y)$, som også gjenspeiler at systemet er uendret om vi erstatter (x,y,t) med $(x,-y,-t)$.

Generelt kan nivåkurven(e) $H(x,y) = E$ skrives på en av de to formene

$$y = \pm\sqrt{1+\frac{E}{1+e^{-x}}}, \quad x = -\ln\Bigl(\frac{E}{y^2-1} - 1\Bigr).$$

Når $E \geq -1$ blir uttrykket i kvadratroten aldri null, så nivåkurven får to adskilte grener, en med $y > 0$ og en med $y < 0$. Når $E < -1$ passer kanskje den andre formen bedre, og gir x som en funksjon av y for $|y| < 1$. Nivåkurven vil spesielt krysse x-aksen i $x = -\ln(-E-1)$. Nivåkurvene gitt ved $E = -1$, altså $H = -1$, vil dermed skille de to typene nivåkurver. Vi kan også skrive ligningen for disse enklere på formen $(1+e^x)y^2 = 1$.

Vi kan også se dette slik: På x-aksen finner vi $H(x,0) = -1 - e^{-x}$, som vokser fra $-\infty$ til -1 når x vokser fra $-\infty$ til $+\infty$. Nivået $H = -1$ skiller altså fasekurvene som krysser x-aksen fra de som ikke gjør det.



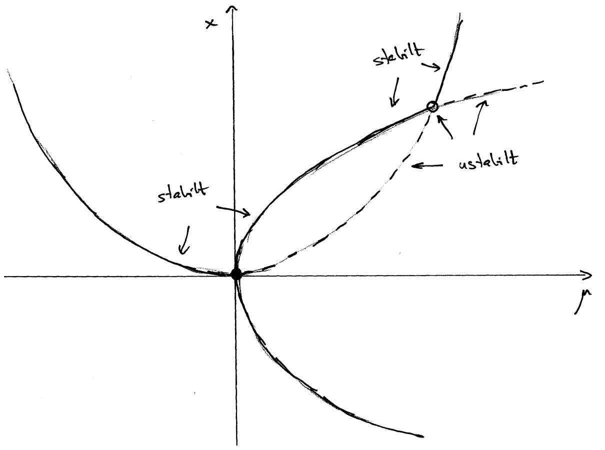
Oppgave 5

Mest elegant er det nok å behandle dette som et konservativt system med friksjon lagt til. Vi skriver altså

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -(\mu^2 - x)(\mu - x^2) - y,$$

og innfører et potensial $F(x)$ med $F'(x) = (\mu^2 - x)(\mu - x^2)$, og energifunksjonen $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + F(x)$, som gir $\dot{E} = -y^2$.

Alle likevektspunkter har selvsagt $y = 0$. Siden energien avtar, vil et likevektspunkt være stabilt om det er et lokalt minimum for F og ustabilt ellers. Siden vi allerede har $F'(x)$ på faktorisert form er det trivielt å drøfte fortegnet til $F'(x)$, og dermed bestemme de kritiske punktene til F og bestemme deres type (lokalt minimum, maksimum, vendepunkt).



Alternativt skriver vi opp Jacobimatrisen til høyresiden i systemet på formen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2 + 2\mu^2 x + \mu & -1 \end{pmatrix}$$

som gir

$$p = \operatorname{tr} A = -1, \quad q = \det A = 3x^2 - 2\mu^2 x - \mu.$$

Likevektspunktet blir stabilt om $q > 0$, ustabilt om $q < 0$, og tilfellene der $q = 0$ må behandles spesielt.

Langs kurven $x = \mu^2$ blir $q = \mu^4 - \mu$, som gir stabilitet når $\mu > 1$ eller $\mu < 0$ og instabilitet når $0 < \mu < 1$.

Langs kurven $\mu = x^2$ blir $q = 2(x^2 - x^3)$, som gir instabilitet når $x > 1$ og stabilitet når $x < 1$ og $x \neq 0$.

Med denne metoden må vi behandle de to tilfellene $(\mu, x) = (0, 0)$ og $(\mu, x) = (1, 1)$ særskilt.

For $\mu = 0$ er ligningen $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x^3 - y$. En passende Liapunovfunksjon er $V = x^4 + 2y^2$, som gir $\dot{V} = -4y^2$. Dette gir stabilitet for $x = 0$.

For $\mu = 1$ har vi $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -(1-x)(1-x^2) - y = -(1-x)^2(1+x) - y$. Med $u = x - 1$ skriver vi altså dette som $\dot{u} = y$, $\dot{y} = -u^2(u+2) - y$, og vi spør etter stabiliteten i $(u, y) = (0, 0)$. Med $V = \frac{1}{4}u^4 + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{2}y^2$ blir $\dot{V} = -y^2 \leq 0$. Siden enhver omegn om origo inneholder punkter hvor $V < 0$, får vi ustabilitet. (Vi trenger også å vite at ingen baner i nærheten av origo har $y = 0$ for annet enn et øyeblikk.)

Oppgave 6

Den første fraktalen beskrives ved tre similituder, hver med en kontraksjonsfaktor lik $\frac{1}{3}$. Den fraktale dimensjonen D_1 skal oppfylle ligningen $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{D_1} = 1$, som har løsningen $D_1 = 1$.

Den andre fraktalen får en fraktal dimensjon D_2 gitt ved $6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{D_2} = 1$, som vi skriver bedre som $3^{D_2} = 6$. Tar vi logaritmer finner vi $D_2 \ln 3 = \ln 6$, som gir

$$D_2 = \frac{\ln 6}{\ln 3} = \frac{\ln 3 + \ln 2}{\ln 3} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3} = 1.6309\ldots$$

Den første utregningen rettferdiggjøres lett: Om fraktalen er K og similitudene kalles S_i, er de tre mengdene $S_i(K)$ disjunkte, og vi har vist dimensjonsformelen rigorøst. For den andre må vi henvise til overlappsbetingelsene, siden $S_i(K)$ fyller sine respektive trekanter helt ut i hjørnene hvor de møter naboene i et punkt.