TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer 2009–06–04

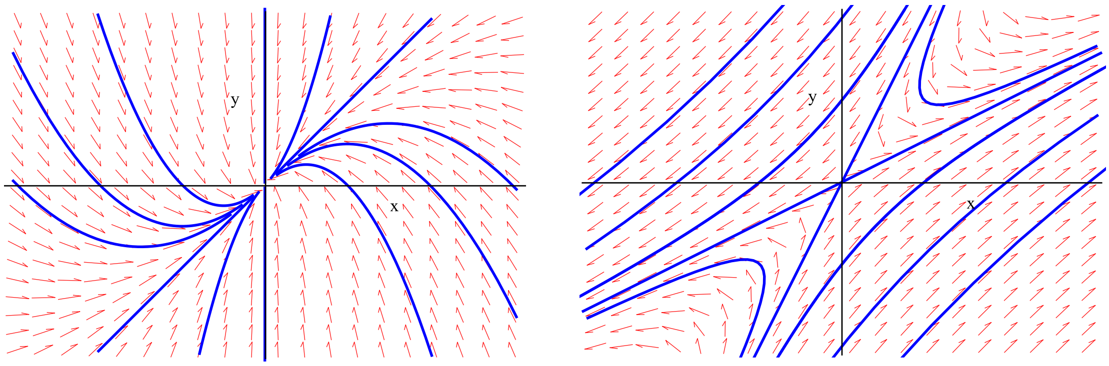
Løsningsforslag

Oppgave 1

Begge systemene i denne oppgaven er lineære, så vi finner den generelle oppførselen fra egenverdiene og spesifikk informasjon fra egenvektorene til matrisen A.

a. Her er $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, som åpenbart har egenverdiene -1 og -2: Dette er en *node*. Egenvektorer er $(0,1)$ for egenverdien -2, og $(1,1)$ for egenverdien -1. Komponenten langs $(0,1)$ går fortest mot null når $t \to \infty$, og fortest mot uendelig når $t \to -\infty$, så bildet som på figuren til venstre under.

b. Her er $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, determinanten er negativ, så dette blir et *sadelpunkt*. Egenverdiene er ± 3. Egenvektorene blir $(2,1)$ for egenverdien $+3$ og $(1,2)$ for egenverdien -3. Se bildet til høyre.



Oppgave 2

a. Vi skriver systemet på formen $\dot{x} = X(x,y)$, $\dot{y} = Y(x,y)$ og regner ut divergensen av vektorfeltet (X,Y):

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = -2y^2 < 0 \qquad \text{for } y \neq 0.$$

Ved Bendixsons negative kriterium finnes ingen ikke-konstante periodiske løsninger.

b. Her er det kanskje greiest å bruke polarkoordinater:

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = x^2 + y^2 - (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)$$

slik at

$$\dot{r} = \big(1 - (x^4 + y^4)\big)r.$$

Når r er tilstrekkelig stor blir $\dot{r} < 0$, og når r er tilstrekkelig liten blir $\dot{r} > 0$, så løsningen holder seg innenfor en annulus med sentrum i $(0,0)$ dersom den starter der.

Ved Poincaré–Bendixson må det enten finnes et likevektspunkt eller en ikke-konstant periodisk løsning innenfor denne annulusen.

Vi sjekker først eksistensen av denne annulusen litt grundigere: Merk at

$$r^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2,$$

så $x^4 + y^4 \le r^2$. Men vi har også $2x^2y^2 \le x^4 + y^4$ (fordi $0 \le (x^2 - y^2)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$), og derfor $r^4 \le 2(x^4 + y^4)$. Alt i alt har vi vist

$$\frac{1}{2}r^4 \le (x^4 + y^4) \le r^4,$$

slik at $\dot r < 0$ når $r < 1$ og $\dot r > 0$ når $r < 2^{1/4}$.

For å sjekke at det ikke finnes likevektspunkter utenom origo kan vi regne ut

$$r^2\dot\theta = x\dot y - y\dot x = \big(x^2 + y^2 + xy(x^2 - y^2)\big)(x^2 + y^2).$$

Dersom $x^2 + y^2 < 2$ så er også $|x^2 - y^2| < 2$, og dermed $\big(x^2 + y^2 + xy(x^2 - y^2)\big) \ge x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \ge 0$. Når $(x, y) \ne (0,0)$ er minst en av disse ulikhetene skarp: Den første er skarp unntatt når $xy = 0$, og den andre er skarp unntatt når $x = y$. (En annen måte å gjøre det på som gir nesten samme regning, er å multiplisere ligningen $\dot x = 0$ med $y^3 - x$ og $\dot y = 0$ med $x^3 + y$ og trekke de to ligningene fra hverandre.) Altså finnes ingen likevektspunkter utenom origo, og vi står tilbake med eksistensen av en lukket bane som eneste mulighet.

c. Dette er en Liénardligning

$$\ddot x + f(x)\dot x + g(x) = 0, \qquad f(x) = g(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

med f og g odde funksjoner, begge positive for $x > 0$. Vi skriver

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \le \tfrac{1}{2}x^2,$$

og estimerer (for $x > 0$):

$$f(x)F(x) \le \frac{x^3}{2(1+x^2)} = \tfrac{1}{2}x^2 g(x) \le \alpha^{-1} g(x)$$

så lenge $x^2 < 2/\alpha$. Med andre ord, vi kan velge $\alpha > 1$, så gjelder $g(x) \ge \alpha f(x)F(x)$ i en omegn om origo. Det følger at origo er et senter, så det er rikelig med ikke-konstante periodiske løsninger.

Med min bevisteknikk, der jeg viser dette ved å bruke Liénardplanet (gjort i forelesninger, ikke skrevet ut i notats form) kan man nøye seg med $\alpha = 1$, så argumentet over blir litt enklere.

Oppgave 3

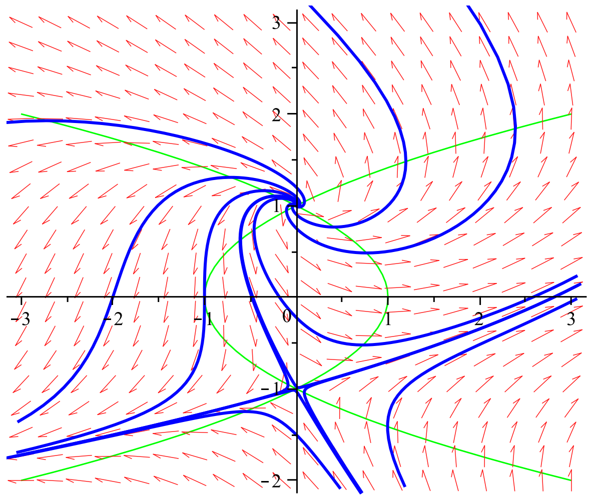
a. Å finne likevektspunktene blir litt enklere ved å addere og subtrahere de to ligningene $\dot x = 0$ og $\dot y = 0$. Summen gir $2x = 0$ og differansen gir $y^2 - 1 = 0$, så likevektspunktene er $(0, \pm 1)$.

Lineariseringen i $(0,1)$ er gitt ved matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$, med $p = \operatorname{tr} A = 3 > 0$, $q = \det A = 4$ og $p^2 - 4q = -5 < 0$. Dette blir et *ustabilt fokus.*

Lineariseringen i $(0,-1)$ er gitt ved matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{smallmatrix}\right)$, med $q = \det A = -4 < 0$. Dette blir et *sadelpunkt.*

b. Spiralen i $(0,1)$ roterer i positiv retning (mot klokka): Det er lettest å se ved å sjekke hva lineariseringen gjør på x-aksen: $\left(\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\ 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x\\ x\end{smallmatrix}\right)$ med positiv y-komponent for $x > 0$. Vi kunne regne videre for å finne ut om spiralen er flatklemt og langs hvilke akser, men det blir for mye detaljer for en liten skisse.

Derimot er har vi stor nytte av å regne ut egenvektorer for sadelpunktet i $(0,-1)$: Egenverdiene blir $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$ med tilhørende egenvektor $(4, -3 + \sqrt{17})$ og $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17})$ med tilhørende egenvektor $(-4, 3 + \sqrt{17})$. (Man kan også estimere retningene på separatrisene (stabil og ustabil mangfoldighet) til sadelpunktet ved å betrakte retningen til vektorfeltet på de grønne kurvene i figuren. Det sparer litt regning.)



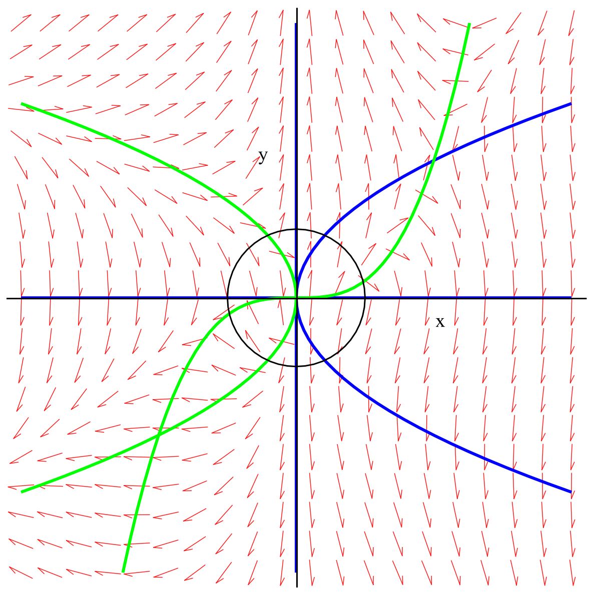
De grønne linjene i figuren er kurvene der henholdsvis $X = 0$ og $Y = 0$, det vil si $x = \pm(y^2 - 1)$. Disse er ikke en del av faseportrettet, men er nyttige for å organisere figuren. Figuren inneholder mange detaljer som man ikke kan forvente kommer med i en eksamenssituasjon, for eksempel hvordan løsningene innenfor parabelen til venstre går ganske raskt mot nedre parabelgren og følger denne utover. Men kanskje har noen lagt merke til at $x = 0$ gir $\dot{x} = -\dot{y}$, slik at løsningskurvene skjærer y-aksen i 45° vinkel. At den ustabile kurven oppover fra sadelpunktet ender opp i fokuset om vi følger den bakover i tid, skulle også være mulig å se med enkle midler.

Oppgave 4

Først finner vi likevektspunktene: $\dot{x} = 0$ gir $x = 0$, $y = 0$ eller $x = y^2$. Satt inn i $\dot{y} = 0$ gir det henholdsvis $y = 0$, $x = 0$ og $y = y^6$. Vi har likevektspunktene $(0,0)$ og $(1,1)$.

Det siste er enklest: Lineariseringen av systemet i $(1,1)$ har matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ med determinant $-10 < 0$ så $(1,1)$ er et sadelpunkt og har derfor indeks lik -1.

Lineariseringen i $(0,0)$ er triviell, så den gir ingen informasjon. Men vi tegner opp kurvene $X = 0$ og $Y = 0$ (der systemet er $\dot{x} = X$, $\dot{y} = Y$) og markerer retningen til vektorfeltet langs hver kurve:



Figuren viser mye mer detaljer i retningsfeltet enn nødvendig for å løse oppgaven. Hovedpoenget er de blå kurvene, hvor vektorfeltet er vertikalt ($\dot{x} = 0$), og de grønne, hvor vektorfeltet er horisontalt ($\dot{y} = 0$). Det er også nødvendig å holde styr på om vektorfeltet peker mot høyre, venstre, opp eller ned på disse kurvene.

Vi sjekker for eksempel hvor mange ganger (X, Y) passerer den positive Y-aksen og i hvilken retning (bare to ganger, først fra $X > 0$ til $X < 0$ og så tilbake igjen – begge deler på den blå parabelgrenen og y-aksen i øvre halvplan) når vi følger en liten sirkel rundt origo (vist i figuren), og konkluderer at indeksen til vektorfeltet i origo er 0.

Systemet kan ikke ha ikke-konstante periodiske løsninger, for innenfor en lukket bane må summen av indeksene til alle likevektspunktene ha være lik 1, og det er ikke mulig.

Oppgave 5

a. La $N(\varepsilon)$ være minste antall sirkelskiver av størrelse ε som trengs for å dekke den gitte mengden K. Om fraktaldimensjonen til K er D så er

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D+o(1)} \qquad \text{når } \varepsilon \to 0.$$

(Det spiller ingen rolle om vi måler størrelsen av en sirkelskive ved radien, diameteren eller en konstant ganger radien. Det forenkler argumentet nedenfor litt, når vi tryller bort en faktor $\sqrt{2}$.)

En kompakt mengde i planet er begrenset, så vi kan si $K \subseteq [a,b] \times [c,d]$. Om vi dekker $[a,b] \times [c,d]$ med et rutenett av ruter med sidekant ε så trenger vi høyst C/ε^2 ruter, der $C = (b-a)(d-c)$.

Dette er ikke helt sant, men om vi begrenser oss til $\varepsilon < 1$ (som er OK fordi vi skal ta grensen når $\varepsilon \to 0$) så kan vi bruke $C = (b-a+1)(d-c+1)$ i stedet.

Nå kan vi dekke hvert av disse kvadratene med en sirkelskive med diameter $\varepsilon\sqrt{2}$, som vi for anledningen kaller sirkler av størrelse ε. Altså er $N(\varepsilon) \le C/\varepsilon^2$, det vil si $\varepsilon^{2-D+o(1)} \le C$ når $\varepsilon \to 0$. Det er bare mulig dersom $2 - D \ge 0$, det vil si $D \le 2$.

b. Den generell formelen for fraktal dimensjon reduseres til $ns^D = 1$ for en fraktal generert av n ikke-overlappende similituder med kontraksjonsfaktor s. Dette gir $\ln n + D \ln s = 0$. Siden $s < 1$ er $\ln s < 0$, og $D \le 2$ gir derfor $\ln n + 2\ln s \le \ln n + D \ln s = 0$. Herfra er det enkel manipulasjon å få $s \le 1/\sqrt{n}$.

Spesielt for eksemplet i oppgaven er $n = 3$, så $s \le 1/\sqrt{3}$. Matrisen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

er ortogonal,[1] så de tre avbildningene S_i er virkelig similituder med kontraksjonsfaktor lik s.

Av figuren ser det ut til at similitudene er ikke-overlappende for de gitte s-verdiene, men at alle mellomrommene blir fylt igjen når $s \to 1/\sqrt{3}$. Da vil også den fraktale dimensjonen gå mot 2, og vi kan også slutte at estimatet $s \le 1/\sqrt{3}$ sannsynligvis er det best mulige estimatet. (Men vi kan ikke vite det sikkert uten faktisk å bevise at similitudene er ikke-overlappende.)

[1] Den er faktisk en 30° rotasjon.