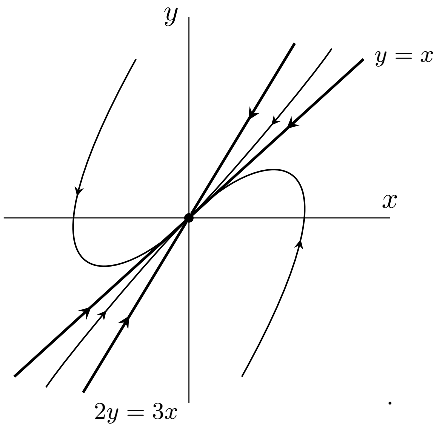
TMA4165 Differensialligninger og dynamiske systemer Våren 2010

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

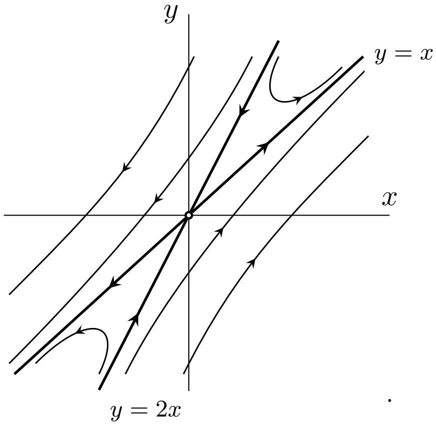
TMA4165
Differensialligninger og dynamiske systemer
Våren 2010

Løsningsforslag
Eksamen 11.6.2010

Oppgave 1 **a)** Systemet er lineært med $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{smallmatrix}\right]$. Her er $\det A = 2$, $\operatorname{tr} A = -3$ og $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 1$, så vi har et stabilt knutepunkt i origo.
Egenverdiene til A er -2 og -1 med tilhørende egenvektorer $[2,3]^T$ og $[1,1]^T$.
Fasediagrammet blir



b) Her er $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right]$ med $\det A = -1$, så origo er et sadelpunkt.
Egenverdiene er $-1, 1$ med tilhørende egenvektorer $[1,2]^T$ og $[1,1]^T$.
Fasediagrammet blir



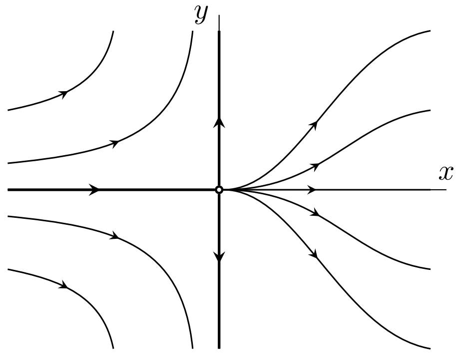
Oppgave 2 **a)** Det lineariserte systemet er systemet i oppgave 1 b). Siden dette er et sadelpunkt gir Hartman-Grobmans teorem at origo er et ustabilt likevektspunkt for det gitte systemet.

b) La

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} X(x,y) \\ Y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1+y^2)+y \\ x^2y+x \end{bmatrix}.$$

Da er $\operatorname{div} f = 1 + x^2 + y^2 > 0$ i hele planet, og Bendixsons negative kriterium gir at systemet ikke har noen periodisk løsning.

Oppgave 3 Systemet har følgende fasediagram:



Vi ser at vi har to hyperbolske sektorer og ingen elliptiske sektorer, dvs. $h = 2$ og $e = 0$ i Bendixsons indeksformel, som gir

$$I_{(0,0)} = 1 + \frac{e-h}{2} = 0.$$

Oppgave 4 **a)** Vi prøver med en Liapunovfuksjon $V = \frac{1}{2}\left(ax^2 + by^2 + cz^2\right)$ og får

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} \\ &= -2ax^2 - by^2 - cz^4 + (b-2a)(xy - xyz) + (3c-b)xyz^2.\end{aligned}$$

Med $a = \frac{3}{2}$, $b = 3$ og $c = 2$ får vi

$$\dot{V} = -(3x^2 + 3y^2 + z^4).$$

Siden $\dot{V} < 0$ for $(x,y,x) \neq (0,0,0)$ er origo et asymptotisk stabilt likevekts-punkt.

b) Med $U = xy$ er $\dot{U} = x^4 + y^4$, og siden $\dot{U} > 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$, er origo et ustabilt likevektspunkt.

Oppgave 5 I polarkoordinater er systemet

$$\dot{r} = r(1-r^2)$$
$$\dot{\theta} = 1$$

a) Vi ser at $r = 1$ gir en periodisk bane. For $0 < r < 1$ er $\dot{r} > 0$ og for $r > 1$ er $\dot{r} < 0$, så ingen andre periodiske baner fins.

b) Fra $\dot{\theta} = 1$ ser vi at $0 \leq t \leq 2\pi$ gir ett omløp om origo, og fra $\dot{r} = r(1-r^2)$ får vi

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int_0^t dt.$$

Dvs.

$$\int_{r_0}^{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{1-r^2} \right) dr = t$$

som gir

$$r(t) = \frac{r_0 e^t}{\sqrt{1 + r_0^2(e^{2t} - 1)}}.$$

Dermed blir Poincaréavbildningen

$$P(r) = \frac{r e^{2\pi}}{\sqrt{1 + r^2(e^{4\pi} - 1)}}.$$

Oppgave 6 Vi skriver differensialligningen som et system $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2y-(2+e^{-t}\sin t)x$ dvs.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = [A + B(t)] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -e^{-t}\sin t & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenverdiene til A har realdel < 0 og

$$\int_{t_0}^{\infty} \|C(t)\| dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-t} |\sin t| dt \leq e^{-t_0} < \infty,$$

så alle løsningene er asymptotisk stabile.

Oppgave 7 Vi har et iterert funksjonssystem bestående av syv similituder, en med kontraksjonsfaktor $\frac{1}{2}$ og seks med kontraksjonsfaktor $\frac{1}{4}$.

Fraktaldimensjonen D finnes ved å løse ligningen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + 6\left(\frac{1}{4}\right)^D = 1.$$

Her er $\left(\frac{1}{2}\right)^D$ lik den positive løsningen $x = \frac{1}{3}$ av ligningen $6x^2 + x - 1 = 0$, så

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58.$$