

Faglig kontakt under eksamen:
Lars Sydnes, tlf. 73 59 17 95.

Eksamen i TMA4165 Differensialligninger og dynamiske systemer

Bokmål
Fredag 11. juni 2010
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler (Kode D): Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Sensurdato: 2. juli 2010.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 Skissér fase-diagrammene med orientering for følgende to system

a)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 3x - 4y\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 2y \\ \dot{y} &= 4x - 3y.\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Avgjør om origo er et stabilt eller ustabilt likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 2y + x^2 \\ \dot{y} &= 4x - 3y + y \sin y.\end{aligned}$$

b) Har systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 + y^2) + y \\ \dot{y} &= x^2y + x\end{aligned}$$

noen ikke-konstante periodiske løsninger?

Oppgave 3 Finn indeksen til origo for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

Oppgavene fortsetter på baksiden av arket.

Oppgave 4

a) Vis at origo er et asymptotisk stabilt likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x - 2y + 2yz \\ \dot{y} &= x - y - xz - xz^2 \\ \dot{z} &= 3xyz - z^3.\end{aligned}$$

b) Avgjør om origo er et stabilt eller ustabil likevektspunkt for systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x^2y + y^3 \\ \dot{y} &= x^3 - 3xy^2.\end{aligned}$$

Oppgave 5 Gitt systemet

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

a) Vis at (*) har en entydig ikke-konstant periodisk bane Γ .

b) Bestem Poincaré-avbildningen til Γ med start på den positive x -aksen.

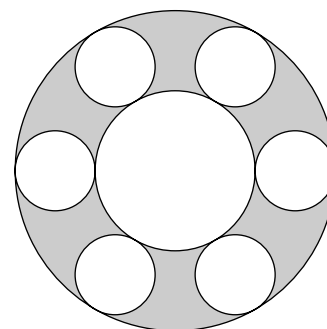
Oppgave 6 Vis at alle løsningene av

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + (2 + e^{-t} \sin t)x = 0$$

er asymptotisk stabile for $t \geq t_0$ der $t_0 \in \mathbb{R}$.

Oppgave 7

Gitt en sirkel S med radius $2r, r > 0$. Innenfor S har vi en sirkel med samme sentrum og radius r , og mellom disse to sirklene ligger 6 sirkler med radius $r/2$ slik at sentrene danner en likesidet sekskant. Se figur. Området mellom de to sirklene med radius r og $2r$ og utenfor de 6 mindre sirklene fjernes. Denne konstruksjonen gjentas for hver av de 7 gjenværende sirklene innenfor S . La A være attraktoren en får ved å gjenta dette n ganger og la $n \rightarrow \infty$.



Finn fraktaldimensjonen til A .