TMA4165 Differential Equations and Dynamical Systems Spring 2011

Solutions to exam spring 2011

$\boxed{1}$ Vi ser på systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A har egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 4$, så origo er en ustabil node. For å bestemme orienteringer finner vi de tilhørende egenvektorene. Ved å bruke uttrykket

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

finner vi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Den generelle formen til løsningen kan skrives

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Vi observerer at for $t \gg 1$ vil e^{4t} dominere og $\mathbf{x}$ er omtrent paralell med $\mathbf{v}_2$. Når $-t \gg 1$, vil e^t dominere, og $\mathbf{x}$ er omtrent paralell med $\mathbf{v}_1$.

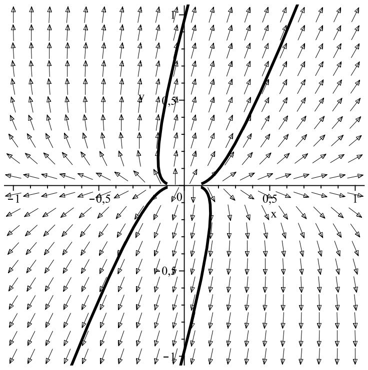

Figure 1: Fasediagram for systemet i oppgave 1.

$\boxed{2}$ **(a)**

Vi har gitt et system

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = f(x, y)$$

med $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} xy \\ x^2 - y - 1 \end{bmatrix}.$$

Systemet har tre likevektspunkter (x,y), dvs. løsninger av $f(x,y) = 0$:

$$(0,-1), \quad (-1,0) \quad \text{og} \quad (1,0).$$

For å sjekke hvilken type de er lineariserer vi og finner at

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & -1 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$Df(0,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

med dobbel egenverdi $\lambda = -1$ og $(0,-1)$ er en stabil node. Videre er

$$Df(\pm 1,0) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 2 & -1 \end{bmatrix},$$

og i begge tilfeller er egenverdiene $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 1$. Det betyr at $(\pm 1, 0)$ er sadelpunkter.

(b)

Observer at $f_1(-x,y) = -f_1(x,y)$ og $f_2(-x,y) = f_2(x,y)$, dvs $f = (f_1, f_2)$ er symmetrisk om y-aksen. For å finne asymptoter til sadelpunktene bruker vi egenvektorene til $Df(1,0)$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Til hjelp kan vi også finne de to isoklinene gitt ved $\dot{x} = 0$ eller $\dot{y} = 0$. Den første gir oss linjene $x = 0$ og $y = 0$, mens den andre gir oss banen $y = x^2 - 1$.

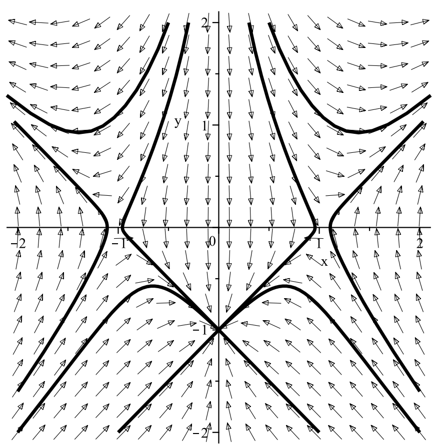

Figure 2: Fasediagram for systemet i oppgave 2. Isokliner er ikke tegnet inn.

(c)

Indeksen i ∞ er gitt ved

$$I_\infty = 2 - \sum I_i$$

der I_i er indeksene til likevektspunktene for systemet. Siden indeksen til en sadel og en node er henholdsvis -1 og 1, får vi at

$$I_\infty = 2 - 1 + 1 + 1 = 3.$$

Kurven C er en sirkel med sentrum i $(-1,-1)$ og radius 2. Den omslutter $(-1,0)$ og $(0,-1)$, men ikke $(1,0)$. Vi har derfor at

$$I_C = I_{(-1,0)} + I_{(0,-1)} = -1 + 1 = 0.$$

3 (a)

Vi har et system på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + C(t))\mathbf{x} + h(t),$$

der

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C(t) = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

A har egenverdier $\lambda = -1 \pm i$, så $\mathrm{Re}(\lambda) = -1$. Vi har også at

$$\int_0^\infty \|C(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}t = 1 < \infty.$$

Det betyr at alle løsninger er asymptotisk stabile.

(b)

Vi søker en Liapunovfunksjon på formen

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2). \tag{1}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} \\ &= ax(z - zy) + by(-yx^2) + cz(-3x + 3xy) \\ &= xz(a - 3c) + xyz(3c - a) - by^2x^2, \end{aligned}$$

som er lik $-y^2x^2$ hvis vi velger $b = c = 1$ og $a = 3$. Dette gir $\dot{V}(\mathbf{x}) \le 0$, og

$$V(\mathbf{x}) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

er en svak Liapunovfunksjon for systemet siden $V(0) = 0$ og $V > 0$ ellers. Origo er derfor et stabilt likevektspunkt.

4 Vi søker etter et invariant område ved hjelp av en funksjon på formen

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2).$$

Vi får at

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} \\
&= ax(2x + 2y - x(2x^2 + y^2)) + by(-2x + y - y(2x^2 + y^2)) \\
&= 2x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)(2x^2 + y^2) \\
&= (1 - (x^2 + y^2))(2x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

ved valg av $a = b = 1$. Dette er større enn 0 for $0 < x^2 + y^2 < 1$ og mindre enn 0 for $x^2 + y^2 > 1$. Det vil si at alle annuluser om 0 som inneholder sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ må være invariante. Vi ser nå etter eventuelle likevektspunkter.

$$\begin{aligned}
r^2\dot{\theta} &= \dot{y}x - \dot{x}y \\
&= (-2x + y - y(2x^2 + y^2))x - (2x + 2y - x(2x^2 + y^2))y \\
&= -2(x^2 + y^2) - xy \\
&\leq -(x^2 + y^2) \qquad \text{fordi } 2xy \leq x^2 + y^2 \\
&< 0 \qquad\qquad\quad \text{for } (x, y) \neq (0, 0).
\end{aligned}$$

Det betyr at det eneste mulige likevektspunktet er $(x, y) = (0, 0)$. Poincaré-Bendixons teorem sier oss da at det finnes minst en grensesykel i enhver annulus om 0 som inneholder sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, så denne sirkelen må være en periodisk ikke-konstant løsning.

PS: Dette beviset kan gjøres enklere og uten Poincaré-Bendixon hvis man konverterer alt til polarkoordinater med en gang.

5 **(a)**

Vi har systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

med

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 2y(x^4 - 2x^2 + 2 \\ 4(x - x^3)(y^2 + 1) \end{bmatrix}.$$

Divergensen til f er

$$\text{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y(4x^3 - 4x) + 4(x - x^3)2y = 0,$$

og systemet er Hamiltonsk. En Hamiltonfunksjon $H(x, y)$ for systemet tilfredstiller

$$\frac{\partial H}{\partial y} = f_1 \quad \text{og} \quad -\frac{\partial H}{\partial x} = f_2.$$

Dermed er

$$H(x, y) = \int_0^y f_1(x, s)\,\mathrm{d}s + C(x) = y^2(x^4 - 2x^2 + 2) + C(x),$$

og

$$f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -y^2(4x^3 - 4x) - C'(x),$$

så

$$C'(x) = -4(x - x^3) \implies C(x) = -2x + x^4 + K.$$

Ved valg av $K = 2$ ender vi opp med

$$H(x, y) = (y^2 + 1)(x^4 - 2x^2 + 2).$$

(b)

Vi finner tre likevektspunkter $(0,0)$, $(1,0)$ og $(-1,0)$. Siden likevekts punkter for f er kristiske punkt for H, kan de klassifiseres ved å bruke 2. deriverttesten på H.

$$D^2H = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (12x^2 - 4)(y^2 + 1) & 8y(x^3 - x) \\ 8y(x^3 - x) & 2(x^4 - 2x^2 + 2) \end{bmatrix}.$$

For $(0,0)$ har vi

$$D^2H(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

så $\det D^2H(0,0) = (-4) \cdot 4 < 0$, altså er $(0,0)$ et sadelpunkt for H og for det dynamiske systemet. For $(\pm 1, 0)$ har vi

$$D^2H(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

med $\det D^2H(\pm 1, 0) = 16 \cdot 4 > 0$, og $(\pm 1, 0)$ er minima for H og sentere for det dynamiske systemet.

$\boxed{6}$ Vi har 3 similtuder (krymping og translasjon) med kontraksjonsfaktor $s = \frac{1}{5}$. Fraktaldimensjonen D er gitt ved

$$\begin{aligned} 3s^D = 1 &\implies \ln 3 + D \ln s = 0 &(2)\\ &\implies D = -\frac{\ln 3}{\ln s} = \frac{\ln 3}{\ln 5} \simeq 0,68. &(3) \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ La x_1 og x_2 være to løsninger av systemet. La

$$u(t) = \frac{1}{2}|x_1(t) - x_2(t)|^2.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (x_1 - x_2) \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ &= (x_1 - x_2) \cdot (f(x_1) - f(x_2)) \\ &\leq |x_1 - x_2||f(x_1) - f(x_2)| \\ &\leq L|x_1 - x_2|^2 = 2Lu, \end{aligned}$$

der L er Lipschitzkonstanten for f, dvs. $|f(a) - f(b)| \leq L|a - b|$ for alle $a, b \in \mathbb{R}^n$. Vi omorganiserer og ganger med e^{-2Lt} og får

$$0 \geq e^{-2Lt}(\dot{u} - 2Lu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-2Lt}u).$$

Når vi integrerer med hensyn på t får vi

$$e^{-2Lt}u(t) \leq u(0),$$

dvs.

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq e^{Lt}|x_1(0) - x_2(0)| = 0,$$

så systemet kan ikke ha to ulike løsninger med samme initialdata.