Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Espen R. Jakobsen, tlf. 91 61 87 27.

Eksamen i TMA4165 Differensiallikninger og dynamiske systemer

Bokmål
Lørdag 28. mai 2011
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler (Kode D): Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Sensurdato: 20. juni 2010.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 Skissér fasediagrammet med orientering for systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = \quad\;\; 4y. \end{cases}$$

Oppgave 2 Gitt systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = x^2 - y - 1. \end{cases}$$

a) Finn og klassifiser alle likevektspunkt.

b) Skisser fasediagrammet med orientering.
Hint: Fasediagrammet er symmetrisk om y-aksen.

c) Finn indeksen til ∞ og til sirkelen C med sentrum i $(-1, -1)$ og radius 2.

Oppgave 3

a) Avgjør om løsningene til systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + (1 - e^{-t})y \\ \dot{y} = -x - y + e^t, \end{cases}$$

er stabile, asymptotisk stabile eller ustabile.

b) Vis at origo er et stabilt likevektspunkt for systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = z - zy \\ \dot{y} = -yx^2 \\ \dot{z} = -3x + 3xy. \end{cases}$$

Oppgavene fortsetter på baksiden av arket.

Oppgave 4 Avgjør om systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - x(2x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -2x + y - y(2x^2 + y^2). \end{cases}$$

har ikke-konstante periodiske løsninger.

Oppgave 5 Gitt systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^4 - 2x^2 + 2) \\ \dot{y} = 4(x - x^3)(y^2 + 1). \end{cases}$$

a) Vis at systemet er Hamiltonsk, og finn en Hamiltonfunksjon for systemet.

b) Finn alle likevektspunkt til systemet og bestem typen til dem.

Oppgave 6

En Cantor-lik mengde konstrueres som følger: start med intervalet [0, 1], del det i fem like delintervall, og fjern delintervall 2 og 3 fra venstre. Gjør konstruksjonen om att med de tre gjenværende delintervallene, og fortsett i det uendelige. Regn ut fraktaldimensjonen til grensemengden.

Oppgave 7 Vis at det ikke kan finnes to ulike løsninger av initialverdiproblemet

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \quad t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

når $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er ein Lipschitz kontinuerlig funksjon.

Merk at $f = (f_1, \ldots, f_n)$ og $x = (x_1, \ldots, x_n)$.