Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Espen R. Jakobsen, tlf. 91 61 87 27.

Eksamen i TMA4165 Differensiallikningar og dynamiske system

Nynorsk
Laurdag 9. juni 2012
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemiddel (Kode D): Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Sensurdato: 30. juni 2012.

Alle svar skal grunngjevast.

Oppgåve 1

a) Skissér fasediagrammet med orientering for systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -3x. \end{cases}$$

b) Finn matriseeksponensialen e^{tA} for $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.
Hint: Bruk punkt a).

Oppgåve 2 Avgjer om systemet har ikkje-konstante periodiske løysingar.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + x^2 + y^4) - e^y, \\ \dot{y} = y(1 + x^2 + y^4) + x. \end{cases}$$

Oppgåve 3 Gitt systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = (x - y)(1 - y). \end{cases}$$

a) Finn alle likevektspunkta til systemet.
Klassifiser likevektspunkta vha. linearisering der det er mogleg.

b) Finn indeksen til sirkelen med sentrum i $(-1, 0)$, radius 2 og orientering mot klokka.

Oppgåve 4 Avgjer om løysingane til systemet er stabile eller ustabile.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - e^t \sin t, \\ \dot{y} = -x - y + e^{-t} z, \\ \dot{z} = (1+t)e^{-t}x + e^{-t}. \end{cases}$$

Oppgåve 5

a) Gitt det autonome to-dimensjonale systemet

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

der $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er ein Lipschitz funksjon.

Definer kva ein fasebane Γ er for system (1) og kva ω-grensemengda til Γ er.

Forklar kva slags ω-grensemengder fasebanen Γ kan ha om Γ ligg i ei lukka, avgrensa delmengde K av $\mathbb{R}^2$.

b) Endringa over tid av tilstanden til to fysiske system kan uttrykkast i polarkoordinatar (r, θ) ved hjelp av differensiallikningane

$$(i) \quad \begin{cases} \dot{r} = (1-r^2)^2 r, \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \qquad \text{og} \qquad (ii) \quad \begin{cases} \dot{r} = (1-r^2)^2 r, \\ \dot{\theta} = 1 - r^2. \end{cases}$$

Finn og klassifiser alle mulige ω-grensemengder til systema.

Avgjer om desse ω-grensemengdene stabile eller ikkje.

Oppgåve 6 Gitt systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = -V_x(x,y) + V_y(x,y), \\ \dot{y} = -V_x(x,y) - V_y(x,y), \end{cases}$$

der V_x og V_y er dei deriverte av funksjonen V og

$$V(x,y) = x^4 + x^2 y + 2y^2.$$

Vis at $V(x,y)$ er ein sterk Liapunov-funksjon for systemet.

Er likevektspunktet $(0,0)$ stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt?

Oppgåve 7 Gitt initialverdiproblemet

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x} + \sin x = 0; \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v, \tag{2}$$

der $x_0, v \in \mathbb{R}$ og $0 < \epsilon < 1$, og la x^0 og x^ϵ vere løysingar av (2) med hhv. $\epsilon = 0$ og $\epsilon \neq 0$.

Vis at det finst ein funksjon $K(t) \geq 0$ slik at

$$|x^0(t) - x^\epsilon(t)| \leq K(t)\epsilon$$

for alle $t \geq 0$ og $0 < \epsilon < 1$.

Hint: Du kan anta at $\max_{0 \leq s \leq t} |\dot{x}^\epsilon(s)| = M_t < \infty$ for alle $t > 0$ og $\epsilon > 0$.