NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

TMA4165 Differensialligninger og dynamiske systemer

Faglig kontakt under eksamen: Nils A. Baas

Tlf: 73 59 35 19

Eksamensdato: 23. mai 2014

Eksamenstid (fra–til): 09.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Skissér faseportrettene (med orientering) rundt origo til følgende systemer:

i) $\dot{x} = -2x - y$
$\dot{y} = x - 2y$

ii) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -x$

iii) $\dot{x} = xy$
$\dot{y} = -x^2$

Oppgave 2 Avgjør om origo er en stabil, asymptotisk stabil eller ustabil likevektstilstand for følgende systemer:

a) $\dot{x} = y - x^3$
$\dot{y} = -x - y^3$

b) $\dot{x} = x^3 + y^2$
$\dot{y} = -xy + y^3$

c) $\dot{x} = 2x + x^2 + z^3$
$\dot{y} = 3y - y^2 + xz$
$\dot{z} = -4z + x^3 - z^4$

Oppgave 3 Gitt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(z+1) \\ \dot{y} &= -x(z+1) \\ \dot{z} &= -z^3. \end{aligned}$$

a) Vis at origo er en stabil likevektstilstand.

b) Er origo en asymptotisk stabil likevektstilstand?

Oppgave 4 Et dynamisk system er gitt i polarkoordinater ved

$$\dot{\theta} = 1, \qquad \dot{r} = \begin{cases} r^2 \sin \frac{1}{r}\,, & r > 0 \\ 0\,, & r = 0. \end{cases}$$

Avgjør om origo er en stabil, asymptotisk stabil eller ustabil likevektstilstand. Gi en skisse av faseportrettet rundt origo.

Oppgave 5

a) Hva sier Poincaré–Bendixson teoremet?

b) La

$$\dot{x} = f(x) \text{ og } \dot{x} = g(x)$$

være to systemer i planet ($x \in \mathbb{R}^2$), der f og g er C^1-funksjoner slik at $\langle f(x), g(x) \rangle = 0$ for alle x ($\langle -, - \rangle$ er vanlig euklidsk skalarprodukt).

Vis at dersom $\dot{x} = f(x)$ har en periodisk løsning, da har systemet $\dot{x} = g(x)$ minst én likevektstilstand.

Oppgave 6 Enhetsintervallet $[0, 1]$ deles i 8 like store deler. Annenhver del fjernes. Prosessen gjentas så i de resterende delene. Dette gjøres n ganger, og la så $n \to \infty$. Regn ut fraktaldimensjonen til den fremkomne mengden.