Oppgave 1 Betrakt systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \lambda - 2 \\ \lambda & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Finn alle bifurkasjonspunkter for systemet.

b) Skissér fasediagrammet, med orientering, for $\lambda = 2$ og $\lambda = -3$.

Oppgave 2 Betrakt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (x^2 - 4x + 3). \end{aligned}$$

a) Skissér fasediagrammet for systemet, med orientering.

b) Gi definisjonen av en homoklin fasebane.
Finn den homokline fasebanen for systemet.

Oppgave 3 Avgjør om origo er en stabil, asymptotisk stabil eller ustabil likevektstilstand for

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -5x + \cos(x) - 1 \\ \dot{y} &= -2y. \end{aligned}$$

Oppgave 4 Betrakt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x^3 + y \\ \dot{y} &= y - y^3 - x. \end{aligned}$$

a) Finn og klassifiser alle likevektspunkter til systemet.

b) Avgjør om systemet har ikke-konstante periodiske løsninger.

Oppgave 5 Betrakt systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (y - x^3)(y - x) \\ \dot{y} &= (x^3 + y)x. \end{aligned}$$

a) Finn indeksen til origo.

b) Avgjør om systemet har ikke-konstante periodiske løsninger.

Oppgave 6 Gitt initialverdiproblemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2(1 + x + x^3 + x^{100})\\ x(0) &= x_0 > 0.\end{aligned}$$

Vis at det finnes $t^* > 0$ slik at $\lim_{t \uparrow t^*} x(t) = \infty$.