Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marte Pernille Hatlo 73591698 / 97537854

EKSAMEN I TMA4180 OPTIMERINGSTEORI

Fredag 2. juni 2006
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler: Rottmanns matematiske formelsamling
Godkjent lommeregner.

Sensur 23. juni 2006.

Oppgave 1 Finn alle minima til funksjonen

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2.$$

Oppgave 2 Definer en *konveks mengde* og en *konveks funksjon* definert på en konveks mengde.

Oppgave 3 Anta at vi skal løse et generelt problem på formen

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x)$$

ved hjelp av linjesøk. Du kan anta at en startverdien x_0 og en søkeretning p allerede er gitt. Neste verdi i iterasjonene er gitt ved

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p$$

der α_0 er en *tilnærmet* løsning av minimeringsproblemet

$$\min_{\alpha} \varphi(\alpha) \qquad \text{der} \quad \varphi(\alpha) = f(x_0 + \alpha p).$$

- Vis at $\varphi'(\alpha) = \nabla f(x_0 + \alpha p)^T p$.
- Sett opp Wolfe-betingelsene for α_0, og forklar hva de innebærer.

Lag gjerne en skisse.

Oppgave 4 Betrakt problemet

$$\begin{aligned} \max\ & \{2x_1 + x_2 + x_3\} \\ \text{slik at}\quad & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Skriv problemet på standard form.

b) Forklar hva et basispunkt ("basic feasible point") er, og finn et for problemet over.

Oppgave 5 Gitt problemet

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} q(x) \\ \text{når} \quad & a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{1}$$

der

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T d$$

Vi antar at G er en symmetrisk positiv definitt matrise.

a) Sett opp Karush-Kuhn-Tucker (KKT) betingelsene for problemet (men ikke løs dem).

Anta at $x^\star$ er en løsning av KKT-betingelsene. Er $x^\star$ i så fall et globalt minumum av (1)?

b) Løs problemet

$$\begin{aligned} &\min \{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\} \\ \text{når} \quad & -x_1-2x_2 \geq -2 \\ & -2x_1 \geq -3 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Hint: Start med en skisse av det tillatte området og nivåkurvene til $q(x)$.

Resten av oppgaven går ut på å konstruere en iterativ algoritme for å løse det generelle kvadratiske problemet (1).

Gitt et tillatt punkt x_0. La $\mathcal{W}$ være et gitt sett av *aktive føringer* i x_0, slik at $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}(x_0)$.

c) Finn en løsning p av det reduserte problemet

$$\begin{aligned} &\min_p \ q(x_0+p) \\ \text{når} \quad & a_i^T(x_0+p) = b_i, \qquad i \in \mathcal{W}, \end{aligned}$$

forutsatt at a_i er lineært uavhengige for $i \in \mathcal{W}$.

Hint: Vis først at dette er ekvivalent med å finne minumum av $p^T G p/2 + p^T(Gx_0 + d)$ med føringene $a_i^T p = 0$ for $i \in \mathcal{W}$.

d) Anta at løsningen p fra **c)** er forskjellig fra 0.
Finn et uttrykk for den største verdien α kan ta, slik at $x_0 + \alpha p$ fortsatt er et tillatt punkt.

Neste verdi i iterasjonskjemaet settes til

$$x_1 = x_0 + \min\{\alpha, 1\} \cdot p.$$

Forklar hvorfor.

e) Utfør *en* iterasjon, dvs. anvend punkt **c)** og **d)** på problem (2). Bruk punktet $x_0 = [3/2, 0]^T$ som startverdi. Du kan selv velge $\mathcal{W}$.

NB! Selv om du ikke har funnet formelle løsninger av det generelle problemet i punkt **c)** og **d)**, kan det godt være at du kan finne dem på det konkrete problemet (2).

f) Punkt **c)** og **d)** er en del av en "activ set method" for kvadratiske problemer. For å fullføre algoritmen må følgende spørsmål besvares:

- Er x_1 løsningen?
- Hvis ikke, hvordan skal $\mathcal{W}$ velges i neste iterasjon?

Gjør rede for hvordan disse spørsmålene kan besvares.

Oppgave 6 Gitt funksjonalen

$$F(y) = \int_0^1 \left(2e^x y(x) + y'(x)^2\right) dx$$

definert på

$$\mathcal{D} = \{y(x) \in C^1[0,1]; \quad y(0) = 0, y(1) = 1\}$$

a) Vis at $F(y)$ er konveks (eventuelt strengt konveks) på $\mathcal{D}$.

b) Løs optimeringsproblemet

$$\min_{y \in \mathcal{D}} F(y).$$

c) Løs optimeringsproblemet

$$\min_{y \in \mathcal{D}_1} F(y),$$

der

$$\mathcal{D}_1 = \{y(x) \in C^1[0,1]; \quad y(0) = 0\}.$$

d) Finn minimum av $F(y)$ på $\mathcal{D}$ dersom det i tillegg kreves at

$$\int_0^1 y(x) dx = 2.$$

Eksamen i TMA4180 Optimeringsteori
Løsningsforslag.

Oppgave 1:

1. ordens betingelse for minima gir oss

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2 \\ 2x_2 - 2x_1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som er oppfylt for når $x_2 = x_1 + 1$. I dette punktet er

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

dvs. $\nabla^2 f(x)$ er positiv semi-definit (egenverdiene er 4 og 0). Dermed er $f(x)$ en konveks funksjon, og linjen $x_2 = x_1 + 1$ utgjør alle minima til funksjonen.

Oppgave 2.

En mengde Ω er konveks dersom: for alle $x, y \in \Omega$ så er $\theta x + (1-\theta)y \in \Omega$ for alle $\theta \in (0,1)$.
En funksjon er konveks på et konvekst sett Ω dersom følgende egenskap er oppfylt: for alle $x, y \in \Omega$ så gjelder

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y), \qquad \text{for alle } \theta \in (0,1).$$

Oppgave 3

- Hvis $x = [x_1,, x_2, \ldots, x_n]^T$ så er $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha p) = f(x_1 + \alpha p_1, \cdots, x_n + \alpha p_n)$, og

$$\varphi'(\alpha) = \frac{\partial f(x_0 + \alpha p)}{\partial x_1} \cdot p_1 + \frac{\partial f(x_0 + \alpha p)}{\partial x_2} \cdot p_2 + \cdots + \frac{\partial f(x_0 + \alpha p)}{\partial x_n} \cdot p_n = \nabla f(x_0 + \alpha p)^T p.$$

- De to Wolfe-betingelsene for skrittlengden α_0 er gitt ved:

  1. $f(x_0 + \alpha_0 p) \leq f(x_0) + c_1 \alpha_0 \nabla f(x_0)^T p.$
  2. $\nabla f(x_0 + \alpha_0 p)^T p \geq c_2 \nabla f(x_0)^T p.$

  hvor $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$er gitte konstanter.

  Den første betingelsen sikrer at et skritt med lengde $\alpha_0$og i retning p reduserer målfunksjonen f tilstrekkelig.
  Den andre betingelsen sikrer at vi ikke velger α_0 for liten. Dessuten, hvis $\varphi'(\alpha)$ er svært negativ, er det et tegn på at vi kan redusere $f(x_0 + \alpha p)$ vesentlig ved å øke α. Denne situasjonen unngås ved betingelse 2. For figurer, se Nocedal & Wright, s. 38-40.

Oppgave 4.

a) Et lineært problem på standard for er gitt ved

$$\begin{aligned} & \min c^T x, \\ \text{slik at} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Vi endrer $\max$ til $\min$ og innfører slakk-variable $y_{1,}y_2$ og y_3, slik at problemet på standard form blir

$$\begin{aligned} &\min\{-2x_1 - x_2 - x_3\} \\ \text{slik at} \quad & x_1 + x_3 + y_1 = 1 \\ & x_2 + x_3 + y_2 = 2 \\ & x_1 + x_2 + y_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

b) Ta utgangspunkt i et generelt lineært problem, der det tillatte området er gitt på formen

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

der A er en $m \times n$ matrise, med $m \leq n$. Et tillatt punkt x er en vektor som oppfyller betingelsene over (selvfølgelig), og som i tillegg har maksimalt m elementer forskjellig fra 0. (Hvis det har færre enn m elementer forskjellig fra 0 sier vi at x er et degenerert basispunkt). For et tillatt basispunkt x skal følgende gjelde: Det skal være mulig å finne et index-sett $\mathcal{B}(x) \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ slik at

- $\mathcal{B}(x)$ inneholder nøyaktig m elementer.
- Hvis $i \notin \mathcal{B}(x)$ så er $x_i = 0$.
- $m \times m$ matrisa definert ved $B = [A_i]_{i \in \mathcal{B}(x)}$ er inverterbar. A_i er kolonne nr. i i A.

For problemet i oppgave **b)** kan et passende basispunkt være

$$x = [0, 0, 0, 1, 2, 3]^T \; .$$

Oppgave 5.

a) Lagrange-funksjonen er gitt ved

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = q(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i^T x - b_i)$$

og for et *tillatt punkt* x er KKT-betingelsene er gitt ved

$$\begin{aligned} Gx + d &= \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i && (1) \\ \lambda_i (a_i^T x - b_i) &= 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ \lambda_i &\geq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

Et punkt $x^\star$ som tilfredsstiller disse betingelsene kalles et KKT-punkt. Siden G er symmetrisk positiv definitt er $q(x)$ strengt konveks. Området $\Omega = \{x : a_i^T x - b_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ er konvekst siden alle føringene er lineære. Dermed vil et KKT-punkt $x^\star$være et globalt minimum.

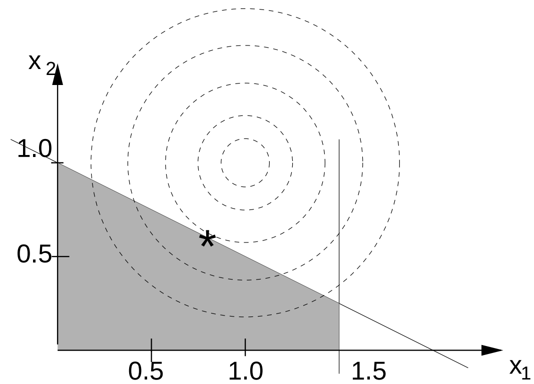
b) Problemet er gitt ved

$$\min\,(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

med føringene

$$\begin{array}{llll} i) & -x_1 - 2x_2 & \geq -2 \\ ii) & -2x_1 & \geq -3 \\ iii) & x_1 & \geq 0 \\ iv) & x_2 & \geq 0. \end{array} \tag{2}$$

En skisse av problemet er gitt under.



Minimum av $q(x)$ ligger utenfor det tillatte (skraverte) området. Det er klart at minimum må ligge på føringen gitt av $-x_1 - 2x_2 \geq -2$. Føringene $-2x_1 \geq -3$ og $x_1, x_2 \geq 0$ er passive, slik at $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. KKT-betingelsene blir da

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2 &= -\lambda_1 \\ 2x_2 - 2 &= -2\lambda_1 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

med løsningen

$$x_1 = \frac{4}{5},\, x_2 = \frac{3}{5},\, \lambda_1 = \frac{2}{5},\, \lambda_2 = \lambda = \lambda_4 0.$$

c) G er symmetrisk, slik at

$$\begin{aligned} q(x_0 + p) &= \frac{1}{2}(x_0 + p)^T G(x_0 + p) + (x_0 + p)^T d \\ &= \frac{1}{2}p^T Gp + p^T(Gx_0 + d) + \frac{1}{2}x_0 Gx_0 + x_0^T p \\ &= \frac{1}{2}p^T Gp + p^T \tilde{d} + q(x_0). \end{aligned}$$

med $\tilde{d} = Gx_0 + d$. $q(x_0)$ er konstant, og vil ikke påvirke løsningen p av optimeringsproblemet. Føringene er gitt av

$$a_i^T(x_0 + p) = b_i, \qquad i \in \mathcal{W}.$$

Alle føringene i $\mathcal{W}$ er aktive i x_0, slik at $a_i^T x_0 = b_i$. Vårt reduserte problem kan dermed reduseres ytterligere til

$$\min_p \left\{ \frac{1}{2}p^T Gp + p^T \tilde{d} \right\} \tag{3}$$

når

$$A_{\mathcal{W}} p = 0$$

der $A_\mathcal{W}$ er en matrise med radene a_i^T, $i \in \mathcal{W}$. Siden a_i er lineært uavhengige vil $A_\mathcal{W}$ ha full rang. Vi kan nå fortsette på en av to måter:

Alternativ a). KKT-betingelsene for det reduserte problemet blir

$$\begin{aligned} Gp + \tilde{d} &= \sum_{i \in \mathcal{W}} a_i \lambda_i = A_\mathcal{W}^T \lambda_\mathcal{W}, \\ A_\mathcal{W} p &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

hvor $\lambda_\mathcal{W} = [\lambda_i]_{i \in \mathcal{W}}$. G er symmetrisk positiv definitt og dermed inverterbar, slik at

$$p = G^{-1}(A_\mathcal{W}^T \lambda_\mathcal{W} - \tilde{d}).$$

Setter vi dette inn i ligningen for føringene får vi

$$A_\mathcal{W} p = A_\mathcal{W} G^{-1}(A_\mathcal{W}^T \lambda_\mathcal{W} - \tilde{d}) = 0$$

Matrisa $A_\mathcal{W}$ har full rang, dermed er matrisa $A_\mathcal{W} G^{-1} A_\mathcal{W}^T$ inverterbar og siste ligning kan løses mhp. $\lambda_\mathcal{W}$. Settes dette igjen inn i uttrykket for p får vi:

$$\lambda_\mathcal{W} = (A_\mathcal{W} G^{-1} A_\mathcal{W}^T)^{-1} A_\mathcal{W} G^{-1} \tilde{d}, \qquad p = \left(G^{-1} A_\mathcal{W}^T (A_\mathcal{W} G^{-1} A_\mathcal{W}^T)^{-1} A_\mathcal{W} G^{-1} - G^{-1}\right) \tilde{d}. \tag{5}$$

Alternativ b). Søkeretningen p må ligge i nullrommet til $A_\mathcal{W}$. La Z være en basis for nullrommet til $A_\mathcal{W}$, slik at alle tillatte søkeretninger p skrives som $p = Zu$, hvor $u \in \mathbb{R}^{n-m_\mathcal{W}}$ og $m_\mathcal{W}$er antall føringer i $\mathcal{W}$. Vi kan dermed definere en ny funksjon

$$f(u) = \frac{1}{2}(Zu)^T G(Zu) + (Zu)^T \tilde{d},$$

og vi har fått et kvadratisk minimeringsproblem i u uten føringer, $\min_u f(u)$, som har løsningen

$$u = -\tilde{G}^{-1} Z^T \tilde{d}.$$

Matrisa $\tilde{G} = Z^T G Z$ er SPD siden Z har full rang og G er SPD. Søkeretningen er nå gitt av

$$p = -Z\tilde{G}^{-1} Z^T \tilde{d}.$$

De tilhørende Lagrange-multiplikatorene kan vi finne ved å sette $\lambda_i = 0$ for alle $i \notin \mathcal{W}$, og løse de resterende fra (4).

d) La $\mathcal{E} = \{1, 2, \cdots, m\}$, og sett $x_\alpha = x_0 + \alpha p$. Da vil $a_i^T x_\alpha = b_i$ for alle $i \in \mathcal{W}$, dvs. at alle føringene i $\mathcal{W}$ er aktive, og dermed oppfylt, for alle α. For at $x_\alpha$skal være et tillatt punkt, alle føringene tatt i betraktning, må

$$a_i^T (x_0 + \alpha p) \geq b_i, \qquad \text{for alle} \quad i \in \mathcal{E} \backslash \mathcal{W}.$$

La

$$\alpha_i = \frac{b_i - a_i^T x_0}{a_i^T p}, \qquad \bar{\alpha} = \min_{i \in \mathcal{E} \backslash \mathcal{W}} \alpha_i. \tag{6}$$

Så lenge $\alpha \leq \bar{\alpha}$, vil altså $x_0 + \alpha p$ være et tillatt punkt. Dermed er to situasjoner mulige:

- Hvis $\bar{\alpha} \geq 1$ så ligger minimum av det reduserte problemet fra punkt **b)**, $x_1 = x_0 + p$ innenfor det tillatte området. Da bruker vi denne verdien.
- Hvis $\bar{\alpha} < 1$ når vi randa av det tillatte området før vi når minimum av det reduserte området. I så fall velger vi $x_1 = x_0 + \bar{\alpha} p$.

e) Skriv om den kvadratiske funksjonen

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}x+x^T\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}+1,$$

der $x=[x_1,x_2]^T$. Så $G=2I$, og $d=[-2,-2]^T$. La $x_0=[3/2,0]^T$, slik at

$$\tilde{d}=2x_0+d=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}.$$

I x_0 er det 2 aktive føringer, $ii)$ og $vi)$ fra (2). Vi kan altså velge $\mathcal{W}$ til å omfatte en av disse, begge eller ingen. I det etterfølgende er alternativ **b)** valgt for å finne p.

Velg f.eks. $\mathcal{W}=\{iv)\}$, slik at $A_{\mathcal{W}}=[0,1]$. Da er $Z=[1,0]^T$, og vi får

$$\tilde{G}=Z^TGZ=2,\qquad \tilde{G}^{-1}=\frac{1}{2}.$$
$$u=-\tilde{G}Z^Td=-\frac{1}{2}.$$
$$p=Zu=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}.$$

Punktet $x_0+p=[1,0]^T$ ligger i det tillatte området (sjekk det), så vi setter

$$x_1=[1,0]^T.$$

Alternativt kunne vi velge $\mathcal{W}=\{ii)\}$, slik at $A_{\mathcal{W}}=[-2,0]$ med nullrom spent ut av $Z=[0,1]^T$, og

$$\tilde{G}=2,\qquad u=1,\qquad p=Z=[0,1]^T.$$

Men $x_0+p=\left[\frac{3}{2},1\right]$ ligger utenfor det tillatte området, føring $i)$ er ikke oppfyllt her. Skrittlengden $\bar{\alpha}$ regner vi ut fra (6). Fra figuren ser vi at det bare er nødvendig å sjekke føring $i)$, de andre vil alle være oppfyllt når vi beveger oss rett oppover fra x_0. Vi får dermed:

$$\bar{\alpha}=\alpha_1=\frac{-2-[-1,-2]\left[\frac{3}{2},0\right]^T}{[-1,-2]\,[0,1]^T}=\frac{1}{4},$$

og

$$x_1=x_0+\bar{\alpha}p=\left[\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$$

Hvis $\mathcal{W}=\{\emptyset\}$så vil $p=\left[-\frac{1}{2},1\right]^T$, $\bar{\alpha}=\frac{1}{3}$ og $x_1=\left[\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right]$.

Hvis $\mathcal{W}=\{ii),iv)\}$ så vil $p=[0,0]^T$.

f)

- Anta først at $x_1=x_0+p$, dvs. at løsningen av det reduserte problemet er et tillatt punkt. Anta at de tilhørende Lagrange-mulitplikatorene er funnet. Dersom $\lambda_i\geq 0$ for alle $i\in\mathcal{W}$ og $\lambda_i=0$ for alle $i\notin\mathcal{W}$, så er KKT-betingelsene for det generelle problemet oppfyllt, og x_1 er vårt globale minimum.
  Hvis $\lambda_i<0$ for en eller flere $i\in\mathcal{W}$, så fjerner vi den føringen som korresponderer til den

største negative verdien av λ. Dette danner da et nytt sett med aktive føringer som brukes til neste iterasjon.

(Dette er ikke en del av en besvarelsen:
Gå tilbake til punkt ***e)****, og la $\mathcal{W} = \{iv)\}$, slik at $x_1 = [1,0]^T$. La $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, og finn $\lambda_4$fra* (1)*, dvs. $\lambda_4 = -2$. Vi kan dermed konkludere med at x_1 ikke er et KKT-punkt, føringen $iv)$ fjernes fra $\mathcal{W}$.)*

- Hvis $x_1 = x_0 + \bar{\alpha}p$, med $\bar{\alpha} < 1$, så betyr det at en ny føring blir aktiv. Denne inkluderer vi i $\mathcal{W}$.

Se for øvrig algoritme 16.1 i Nocedal & Wright.

Oppgave 6.

a) Vi undersøker om $f(x,y,z) = 2e^x y + z^2$ er sterkt konveks i $S \subseteq \mathbb{R}^3$ etter definisjon (3.4) i Troutman, dvs. om:

$$f(x,y+v,z+w) - f(x,y,z) \geq f_y(x,y,z)v + f_z(x,y,z)w, \quad \forall (x,y,z) \text{ and } (x,y+v,z+w) \in S$$

med $=$ bare hvis $v=0$ eller $w=0$. I vårt tilfelle er $f_y = 2e^x$ og $f_z = 2z$, og

$$\begin{aligned} f(x,y+v,z+w) - f(x,y,z) &= 2e^x(y+v) + (z+w)^2 - 2e^x y - z^2 \\ &= 2e^x v + 2zw + w^2 \\ &\geq 2e^x v + 2zw, \qquad \text{for alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

med likhet hvis og bare hvis $w = 0$. Så f er sterkt konveks, og dermed er $F(y)$ strengt konveks på $\mathcal{D}$ (Teorem 3.5).
Alternativt kunne en skrive

$$F(y) = \int_0^1 2e^x y(x)dx + \int_0^1 y'(x)^2 dx.$$

Det siste integralet er en strengt konvekst på $\mathcal{D}$ (hvorfor?), det første er lineært i y og dermed konvekst (men ikke strengt konvekst). Summen av en konveks og en strengt konveks funksjonal blir en strengt konveks funksjonal.
Det er også mulig å bruke definisjon (3.1) i Troutman direkte.

(Før vi løser de siste oppgavene, la oss som neste skritt utlede Euler-Lagrange-ligningene: Gitt funksjonalen $F(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$. Den Gateaux -deriverte av $F(y)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \delta F(y;v) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y+\varepsilon v, y' + \varepsilon v')|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_a^b \left(f_y(x,y,y')v + f_z(x,y,y')v' \right) dx \\ \textit{(Delvis integrasjon)} \qquad &= \int_a^b \left(f_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} f_z(x,y,y') \right) v dx + |_a^b f_z(x,y,y')v \end{aligned}$$

Dette forutsetter at f er tilstrekkelig glatt til at derivasjonen med hensyn på ε kan flyttes innenfor integrasjonen. I så fall er $\delta F(y;v) = 0$ for alle $y, v + y \in \mathcal{D}$ hvis

$$\frac{d}{dx} f_z(x,y,y') = f_y(x,y,y'), \qquad f_z(a,y(a),y'(a))v(a) = 0 \quad \textit{og} \quad f_z(b,y(b),y'(b))v(b) = 0. \tag{7}$$

Den første ligningen er Euler-Lagrange ligningen, de to andre er randbetingelser.)

b) Euler-Lagrange ligningen blir

$$\frac{d}{dx}2y' = 2e^x \quad \text{som blir} \quad y'' = e^x, \quad \text{med løsning} \quad y(x) = e^x + C_1 x + C_2 \tag{8}$$

der C_1 og C_2 er konstanter som må bestemmes fra randbetingelsene. I dette tilfellet ser vi at $y, v + y \in \mathcal{D}$ bare hvis $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ og $v(0) = v(1) = 0$. De to randbetingelsene i (7) automatisk er oppfyllt, C_1og C_2bestemmes fra randbetingelsene for y. Resultatet blir:

$$y(x) = e^x + (2 - e)x - 1.$$

c) Euler-Lagrange ligningen er som før, med løsning gitt i (8). De to konstantene blir nå bestemt av randbetingelsen $y(0) = 0$ og $f_z(1, y(1), y'(1)) = 2y'(1) = 0$, den siste betingelsen kommer fra (7). Dette resulterer i løsningen

$$y(x) = e^x - ex - 1.$$

d) Vi ser nå på den utvidede funksjonalen

$$\tilde{F}(y) = \int_0^1 \left(2e^x y + y'^2\right) dx + \lambda \int_0^1 y dx.$$

der λ er en (foreløbig) ukjent konstant. Siden det siste integralet er lineært i y, vil også $\tilde{F}$ være strengt konveks på $\mathcal{D}$. Euler-Lagrange ligningen blir:

$$y'' = e^x + \frac{1}{2}\lambda \qquad \text{med løsning} \qquad y(x) = e^x + \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Med randbetingelsene $y(0) = 0$ og $y(1) = 1$ blir løsningen

$$y(x) = e^x + \frac{\lambda}{4}x^2 + (2 - e - \lambda)x - 1.$$

Konstanten λ bestemmes av tilleggsbetingelsen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(x)dx &= \int_0^1 \left(e^x + \frac{\lambda}{4}x + (2 - e - \lambda)x - 1\right) dx \\
&= |_0^1 e^x + \frac{\lambda}{12}x + \frac{1}{2}(2 - e - \frac{\lambda}{4})x^2 - x \\
&= e - 1 + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{2}(2 - e - \lambda) - 1 = 2
\end{aligned}$$

som har løsningen $\lambda = 12e - 72$. Løsningen $y(x)$ er dermed gitt av

$$y(x) = e^x + (3e - 18)x^2 + (20 - 4e)x - 1.$$