MATEMATISK MODELLERING (TMA4195)
Eksamen torsdag 3. desember 2009
Løsning med kommentarer

**Oppgave 1:**

*For å kvantifisere hvor store lekkasjer som oppstår fra hull i tanker og transportrør for væske (f.eks. olje, vann, gass), har det blitt foreslått å utføre kontrollerte eksperimenter. Utstrømningen gjennom hullet, $Q$ , målt i $m^3/s$, antas å være avhengig av arealet av åpningen, $A$, differensen mellom trykket innenfor og utenfor hullet, $\Delta p$, $[\Delta p] = kg/s^2m$, samt væskens tetthet, $\rho$, $[\rho] = kg/m^3$, og dynamiske viskositet, $\mu$, $[\mu] = kg/ms$. Verifisér at dimensjonsanalysen gir oss formelen*

$$Q = \frac{A\Delta p^{1/2}}{\rho^{1/2}}\phi\left(\frac{A^{1/2}\rho^{1/2}\Delta p^{1/2}}{\mu}\right), \tag{1}$$

*og angi hvordan en kan organisere måledataene for å bestemme funksjonen $\phi$ eksperimentelt.*

**Løsning:**

Utgangspunktet er $Q = f(A, \Delta p, \rho, \mu)$, og siden alle enheter er gitt, får vi dimensjonsmatrisen

| | $Q$ | $A$ | $\Delta p$ | $\rho$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| kg | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| m | 3 | 1 | -1 | -3 | -1 |
| s | -1 | 0 | -2 | 0 | -1 |

Rangen på matrisen lik 3, og vi har følgelig 2 dimensjonsløse kombinasjoner. Med $A$, $\rho$ og $\Delta p$ som kjernevariable får vi

$$\pi_1 = \frac{Q}{A\Delta p^{1/2}\rho^{-1/2}}, \tag{2}$$

$$\pi_2 = \frac{A^{1/2}\rho^{1/2}\Delta p^{1/2}}{\mu}, \tag{3}$$

som gir oss oppgitt formel. Egentlig bør en her i tillegg kommentere at det innenfor det gitte antall dimensjonsløse variable finnes mange (ekvivalente) muligheter.

Formelen er forbausende enkel. Så lenge en kan anta at det dreier seg om vanlige væsker og hull med samme geometriske form, kan en nøye seg med ett måleoppsett og en væske, der en måler $Q$ som funksjon av $\Delta p$ og plotter $\pi_1$ mot $\pi_2$ for å bestemme $\pi_1 = \phi(\pi_2)$.

**Oppgave 2**

*På den matematiske golfbanen er oppgaven å slå ballen fra origo i tidspunktet $t = 0$, $y(0) = 0$, med hastighet $V = \frac{dy}{dt}(0)$, slik at den for tidspunktet $t = 1$ havner i $y = 1$, dvs. $y(1) = 1$. Bevegelsen til ballen styres av den ikke-lineære diff.ligningen*

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - e^{-t}y^2 = 0,\ 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

*der $\varepsilon$ er en konstant, $0 < \varepsilon \ll 1$. Finn et tilnærmet uttrykk for $V$ ved å løse ligningen til ledende orden ved hjelp av singulær perturbasjon (Vink: Ligningen $\dot{x} = x^2e^{-t}$ har løsning $\left(e^{-t} - A\right)^{-1}$. Bruk $\tau = t/\varepsilon$ som tidsvariabel i starten av bevegelsen).*

**Løsning:**

Dette er en singulært perturbert ligning der grensesjiktet, etter vinket, opptrer nær $t = 0$. Ytre løsning finnes ved å sette inn $y(t) = y_0(t) + y_1(t) + \cdots$, og til ledende orden får vi

$$\frac{dy_0}{dt} - e^{-t}y_0^2 = 0, \tag{5}$$

eller $y_0^{-2} dy_0 = e^{-t} dt$. Vi integrerer og finner, som oppgitt,

$$y_0(t) = \frac{1}{e^{-t} - A}, \tag{6}$$

der $A$ er en integrasjonskonstant. Som vanlig lar vi den ytre løsningen tilfredsstille randkravet som ikke ligger i grensesjiktet, dvs.

$$y_0(1) = 1 = \frac{1}{e^{-1} - A}. \tag{7}$$

Dette gir oss $A = e^{-1} - 1$, og

$$y_0(t) = \frac{1}{1 + e^{-t} - e^{-1}}. \tag{8}$$

For indre løsning benytter vi hintet i oppgaven og setter $Y(\tau) = Y_0(\tau) + \varepsilon Y_1(\tau) + \cdots$, der $t = \varepsilon\tau$:

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - e^{-t} y^2 = \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 Y}{d\tau^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dY}{d\tau} - e^{-t} Y^2 = 0. \tag{9}$$

Multiplikasjon med $\varepsilon$ gir til ledende orden

$$\frac{d^2 Y_0}{d\tau^2} + \frac{dY_0}{d\tau} = 0. \tag{10}$$

Siden generell løsning er $Y_0(\tau) = B_1 + B_2 e^{-\tau}$, kan vi tilfredsstille $Y_0(0) = 0$ ved å sette

$$Y_0(\tau) = B\left(1 - e^{-\tau}\right). \tag{11}$$

Matching-kravet

$$\lim_{\tau\to\infty} Y_0(\tau) = \lim_{t\to 0} y_0(t), \tag{12}$$

gir oss deretter

$$B = \lim_{t\to 0} y_0(t) = \frac{1}{1 + e^{-0} - e^{-1}} = \frac{1}{2 - e^{-1}}. \tag{13}$$

Ledende ordens uniforme løsning er

$$\begin{aligned} y^u(t) &= Y_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) + y_0(0) - \lim_{t\to 0} y_0(t) \\ &= \frac{1}{2 - e^{-1}}\left(1 - e^{-t/\varepsilon}\right) + \frac{1}{1 + e^{-t} - e^{-1}} - \frac{1}{2 - e^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-t} - e^{-1}} - \frac{1}{2 - e^{-1}} e^{-t/\varepsilon}, \end{aligned} \tag{14}$$

og hastigheten, $V = \frac{dy}{dt}(0)$, blir til ledende orden

$$V \approx \frac{dy^u}{dt}(0) = \frac{1}{(2 - e^{-1})} \frac{1}{\varepsilon} + O(1). \tag{15}$$

For $V$ blir altså "ledende orden" $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-1}\right)$, og en utfordring for spilleren!

**Oppgave 3:**

*(a) Den vanligste modellen for biltrafikk langs en vei leder til dimensjonsløs bilfluks på formen $j = \rho(1 - \rho)$. Skriv ned de viktigste sammenhengene i denne modellen, og sett opp diff.ligningen som modellen leder til (utenom områder med av- og innpåkjørsel). Når utvikler løsningen av diff.ligningen et sjokk?*

*Vi tar utgangspunkt i modellen og antar at det på hele vegen, for $t < 0$, kjører biler med konstant tetthet $\rho = 1/2$. For $t \geq 0$ settes fartsgrensen (maksimalhastigheten) mellom $x = 0$ og $x = 1$ ned til halvparten, mens maksimal tetthet forblir den samme. Vi antar at en tilsvarende type sammenheng mellom bilhastighet og tetthet holder i området $0 < x < 1$ for $0 < t$, og at bilene responderer umiddelbart på endringene.*

*(b) Hvilken betingelse på bilfluksen gjelder i $x = 0$ og $x = 1$? Bestem løsningen $\rho(x, t)$ for $t > 0$. (Vink: Anta at tettheten for $0 < x < 1$ forblir uendret)*

*(c) Beskriv hvordan det er å kjøre gjennom denne hindringen, basert på bilhastigheten i de ulike områdene av løsningen (Det er ikke nødvendig å regne ut akkurat når eller hvor hastighetsendringene skjer).*

**Løsning:**

**(a)** Modellen starter med å definere en biltetthet $\rho^*$ som ligger mellom 0 og en maksimal tetthet $\rho_{\max}$. Bilhastigheten antas å være en lineær funksjon av $\rho^*$, $v^* = v_{\max}\left(1 - \frac{\rho^*}{\rho_{\max}}\right)$. Dermed blir fluksen $j^* = \rho^* v^* = \rho^* v_{\max}\left(1 - \frac{\rho^*}{\rho_{\max}}\right)$. Skalering med

$$\rho^* = \rho\rho_{\max}, \tag{16}$$
$$x^* = Lx, \tag{17}$$
$$t^* = (L/v_{\max})t \tag{18}$$

resulterer i $v = 1 - \rho$, $j = \rho(1 - \rho)$ og diff.-ligningen

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0, \tag{19}$$
$$c(\rho) = \frac{dj}{d\rho} = 1 - 2\rho. \tag{20}$$

Siden $c(\rho)$ avtar når $\rho$ øker, vil en situasjon der $\rho(x_1, t) < \rho(x_2, t)$ for $x_1 < x_2$ utvikle seg til et sjokk.

**(b)** I $x = 0$ og $x = 1$ er det ingen mulighet for å akkumulere biler, slik at *fluksen er kontinuerlig i disse punktene for alle $t$.*

Mellom $x = 0$ og 1 vil sammenhengen mellom hastighet og tetthet for $t > 0$ bli $v = \frac{1}{2}(1 - \rho)$, og fluksen får formen $\frac{1}{2}\rho(1 - \rho)$. Ut fra tipset kan vi anta at $\rho$ forblir lik $1/2$, og fluksen dermed blir $1/8$ (og maksimal) i dette området *for alle $t \geq 0$.*

Da gjenstår å finne løsningene for $x < 0$ og $x > 1$. I disse to områdene svarer $j = 1/8$ til to mulige tettheter, nemlig løsningene av $\frac{1}{8} = \rho(1 - \rho)$ ,dvs.

$$\rho_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \tag{21}$$
$$\rho_- = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}. \tag{22}$$

Dette betyr at det umiddelbart til venstre for $x = 0$ når $t > 0$, vil bygge seg opp en kork der bilene har tetthet $\rho^+$ og fluksen er $1/8$. I bakkanten av korken utvikles et sjokk som beveger seg mot venstre ut fra $(0, 0)$.

I området $x \geq 1$ og $t > 0$ er fluksen ut fra $x = 1$ lik $1/8$ (større kan den ikke bli!). Det er naturlig å assosiere dette med tettheten $\rho_-$, og dermed får karakteristikkene positiv kinematisk hastighet og kolliderer med karakteristikkene som kommer opp fra $x$-aksen for $x > 1$. Det utvikles følgelig et sjokk også på denne siden. Siden tetthetene på begge sider av sjokkene er

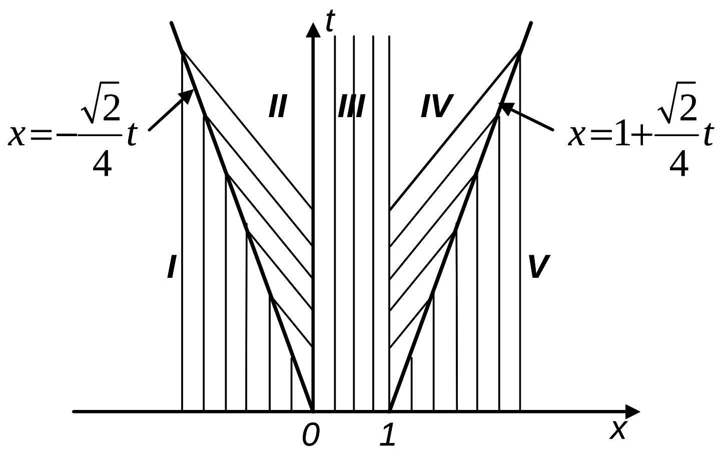


Figure 1: Karakteristikker og sjokk.

konstante, kan vi umiddelbart regne ut sjokkhastighetene $U_1$ (bakover fra $x = 0$) og $U_2$ (framover fra $x = 1$):

$$U_1 = \frac{\rho_+ (1 - \rho_+) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\rho_+ - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}, \tag{23}$$

$$U_2 = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \rho_- (1 - \rho_-)}{\frac{1}{2} - \rho_-} = \frac{1}{4}\sqrt{2}. \tag{24}$$

Forholdene er skissert på fig. 1.

Tilsammen kan vi oppsummere løsningen for $t > 0$ som følger:

| Område | $x$ | $t$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|
| **I** | $x < 0$ | $x < -\frac{\sqrt{2}}{4}t$ | $\frac{1}{2}$ |
| **II** | $x < 0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{4}t < x$ | $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$ |
| **III** | $0 < x < 1$ | $0 < t$ | $\frac{1}{2}$ |
| **IV** | $1 < x$ | $x < 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}t$ | $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$ |
| **V** | $1 < x$ | $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}t < x$ | $\frac{1}{2}$ |

(c) I område **I** kjører vi med hastighet $v_{\mathbf{I}} = 1/2$ til vi møter korken i **II**. Gjennom **II** går hastigheten ned til

$$v_{\mathbf{II}} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \approx 0.15. \tag{25}$$

I sonen med nedsatt maksimumsfart er hastigheten

$$v_{\mathbf{III}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0.25, \tag{26}$$

mens det går raskere i område **IV**,

$$v_{\mathbf{IV}} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \approx 0.85 \tag{27}$$

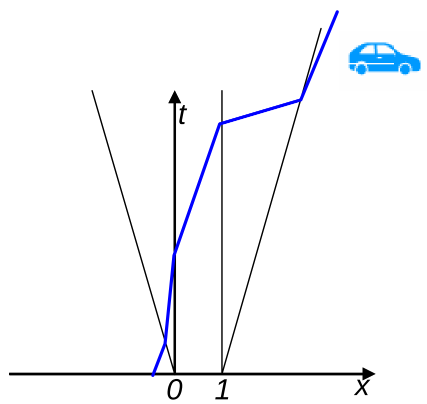


Figure 2: Skisse av bilens bevegelse gjennom sonen med redusert hastighet (plottet er langt fra nøyaktig!).

Tilslutt i område **V** er hastigheten den samme som i **I**, dvs. 1/2. En grov skisse av bilens bevegelse i $x/t$-diagrammet er vist på figur 2.

**Oppgave 4**

*I en isolert populasjon som består av $M_0$ individer, overføres influensasmitte ved at syke personer $S^*$ møter friske personer som er mottakelige for smitte. Antall som smittes pr. tidsenhet er proporsjonal med sannsynligheten for at syke personer treffer mottakelige friske, og proporsjonalitetskonstanten, $r$, kalles infeksjonsraten (pr. individ). Etter ei stund friskner de syke til.*

*(a) Følgende dynamiske modell har blitt foreslått for antallet syke hvis ingen blir immune etter å ha vært syke:*

$$\frac{dS^*}{dt^*} = rS^*\left(M_0 - S^*\right) - \alpha S^*. \tag{28}$$

*Angi, ut fra denne ligningen, tidsskalaene for utviklingen av epidemien i starten, et overslag for hvor lenge folk er syke, og skalér ligningen. Størrelsen på $r$ kan reguleres ved hjelp av vaksiner og andre pålegg. Drøft de stasjonære løsningene av den skalerte ligningen i lys av dette.*

*En mer realistisk modell må ta hensyn til at de som har blitt friske vil være immune, i alle fall noen tid etter sykdommen. Følgende (skalerte) matematiske modell har derfor blitt foreslått for antallet syke, $S(t)$, og immune, $I(t)$, personer:*

$$\frac{dS}{dt} = S\left(1 - I - S\right) - \lambda S, \tag{29}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda S - \mu I. \tag{30}$$

*(b) Angi hvor i $(S, I)$-planet de fysisk akseptable løsningene, $\{S(t), I(t)\}$, ligger, og hva parametrene $\mu$ og $\lambda$ betyr. Dette dynamiske systemet har et opplagt stasjonært punkt. Når er dette punktet stabilt? (Det er ikke nødvendig å studere grensetilfellene)*

*(c) Bestem for hvilke verdier av $\lambda$ og $\mu$ systemet (30) har et annet, fysisk akseptabelt stasjonært punkt $(S_0, I_0)$. Vis at disse punktene ligger på et linjestykke i $(S, I)$-planet hvis $\lambda$ holdes fast mens $\mu$ varierer.*

*(d) Linearisér systemet (30) rundt $(S_0, I_0)$ i (c) ved å føre inn $S(t) = S_0 + x(t)$, $I(t) =$*

*$I_0 + y(t)$, og vis at matrisen $A$ i det lineariserte systemet $\dot{x} = Ax$, $x = [x, y]'$, da får formen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -S_0 & -S_0 \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}. \tag{31}$$

*Bestem hvorvidt $(S_0, I_0)$ er stabilt eller ustabilt.*

**Løsning:**

**(a)** Vi omskriver ligningen til

$$\frac{dS^*}{dt^*} = (rM_0)\, S^* \left(1 - \frac{S^*}{M_0}\right) - \alpha S^*. \tag{32}$$

I starten av epidemien er $S^* \ll M_0$, slik at $S^*$ vokser omlag eksponensielt med vekstrate $rM_0$, hvis vi ikke trekker inn siste ledd i ligningen. En rimelig tidskala for veksten i antall smittede blir følgelig $T_1 = (rM_0)^{-1}$. Hvis ingen smittes, friskner de syke til eksponensielt, $S^* = S_0 \exp(-\alpha t^*)$, slik at $T_2 = \alpha^{-1}$ er en typisk tidsskala for tilfriskning. Skalering med $M_0$ for $S^*$ og $I^*$, og $T_1$ for $t^*$ gir oss

$$\frac{dS}{dt} = S\,(1 - S) - \lambda S, \tag{33}$$

$$\lambda = \frac{T_1}{T_2} = \frac{\alpha}{M_0 r}. \tag{34}$$

Her er $\lambda \geq 0$, og ligningen har stasjonære løsninger for

$$S_0 = 0, \tag{35}$$

$$S_1 = 1 - \lambda,\ 0 < \lambda \leq 1 \tag{36}$$

Stabiliteten avgjøres på vanlig måte, for eksempel ved å sjekke den deriverte av høyresiden med hensyn på $S$. Vi ser lett at $S_0$ stabil for $\lambda > 1$, og ustabil for $0 \leq \lambda < 1$. Likevektspunktet $S_1$ er stabilt for $0 \leq \lambda < 1$. For $\lambda = 1$ blir ligningen $\dot{S} = -S^2$ med løsninger som konvergerer mot 0 hvis vi starter fra en positiv verdi.

Hvis $\lambda > 1$, dvs. $r < \alpha/M_0$, vil det ikke kunne bygge seg opp noen omfattende epidemi. Dermed kan det slås fast at myndighetenes oppfordring om håndvask og kontrollert nysing har noe for seg, i motsetning til Uka09's burleske innslag om smittefest.

I motsatt fall vil det etter hvert innstille seg en stasjonær tilstand der en andel $1 - \lambda$ i befolkningen er syke til enhver tid.

**(b)** Populasjonen kan nå deles i syke ($S$), immune ($I$), og friske ($1 - I - S$). Følgelig begrenses det fysiske området til $0 \leq S$, $0 \leq I$, og $S + I \leq 1$. Parameteren $\lambda$ har samme betydning som i (a), $\lambda = T_1/T_2$, mens $\mu$ er et tilsvarende forhold $T_1/T_3$, der $T_3$ angir en typisk nedbrytningstid for immuniteten. Det er rimelig å anta at $T_1 \ll T_3$.

Det opplagte stasjonære punktet er $S_0 = 0$, $I_0 = 0$, og det lineariserte systemet får formen

$$\frac{dS}{dt} = (1 - \lambda)\, S, \tag{37}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda S - \mu I. \tag{38}$$

Siden både $\lambda$ og $\mu$ er større enn 0, ser vi umiddelbart at både $S$ og $I$ vil konvergere mot null for $t \to \infty$ hvis $\lambda > 1$. Dette følger naturligvis også, som angitt for punkt (d), ved å se på den tilhørende matrisen for det lineariserte systemet,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}, \tag{39}$$

som har egenverdiene $1-\lambda$ og $-\mu$. Følgelig blir $(0,0)$ stabilt hvis $\lambda > 1$ og $\mu > 0$ (men ustabilt når $0 < \lambda < 1$).

**(c)** Vi skal løse

$$\lambda S_0 - \mu I_0 = 0, \tag{40}$$

$$S_0 \left(1 - I_0 - S_0\right) - \lambda S_0 = 0. \tag{41}$$

Siden $S_0 = \frac{\mu}{\lambda} I_0$, og vi skal ha en annen løsning enn $(0,0)$, kan vi anta at $S_0 \neq 0$. Følgelig må

$$\left(1 - I_0 - S_0\right) - \lambda = 0, \tag{42}$$

eller

$$S_0 + I_0 = 1 - \lambda. \tag{43}$$

Hvis vi setter inn $S_0 = \frac{\mu}{\lambda} I_0$, ser vi lett at

$$I_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(1 - \lambda\right), \tag{44}$$

$$S_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(1 - \lambda\right). \tag{45}$$

Akseptable verdier for $\lambda$ og $\mu$ blir følgelig

$$0 < \lambda < 1, \tag{46}$$

$$0 < \mu < \infty, \tag{47}$$

og linjestykket for konstant $\lambda$ er gitt av lign. 43.

**(d)** Lineariseringen rundt $(S_0, I_0)$ finnes ved å skrive systemet

$$\dot{S} = f\left(S, I\right), \tag{48}$$

$$\dot{I} = g\left(S, I\right), \tag{49}$$

og føre inn $S\left(t\right) = S_0 + x\left(t\right)$, $I\left(t\right) = I_0 + y\left(t\right)$, slik at vi får (til ledende orden)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S}\left(S_0, I_0\right) & \frac{\partial f}{\partial I}\left(S_0, I_0\right) \\ \frac{\partial g}{\partial S}\left(S_0, I_0\right) & \frac{\partial g}{\partial I}\left(S_0, I_0\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Ved å sette inn, får Jacobimatrisen generelt formen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda - I_0 - 2S_0 & -S_0 \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}, \tag{51}$$

og siden $1 - \lambda = S_0 + I_0$, blir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -S_0 & -S_0 \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Ligningen for egenverdiene, $\alpha_1$ og $\alpha_2$, blir

$$\left(-\alpha - S_0\right)\left(-\alpha - \mu\right) + \lambda S_0 = \alpha^2 + \left(S_0 + \mu\right)\alpha + S_0\left(\lambda + \mu\right) = 0. \tag{53}$$

Siden $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$, mens $\alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$, må realdelen til egenverdiene være negativ. Følgelig er $(S_0, I_0)$ alltid stabilt inne i det tillatte området.

Merk forøvrig at $(S, I)$-systemet degenererer til ligningen i (a) når $\mu \to \infty$.