LØSNINGER TIL ENKLE, ENDIMENSJONALE BEVARELSESLOVER

Bevarelsesloven

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx + j(\rho(b,t)) - j(\rho(a,t)) = 0$$

leder til differensialformuleringen

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{dj(\rho)}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

som er en første orden, kvasilineær part.differensialligning der

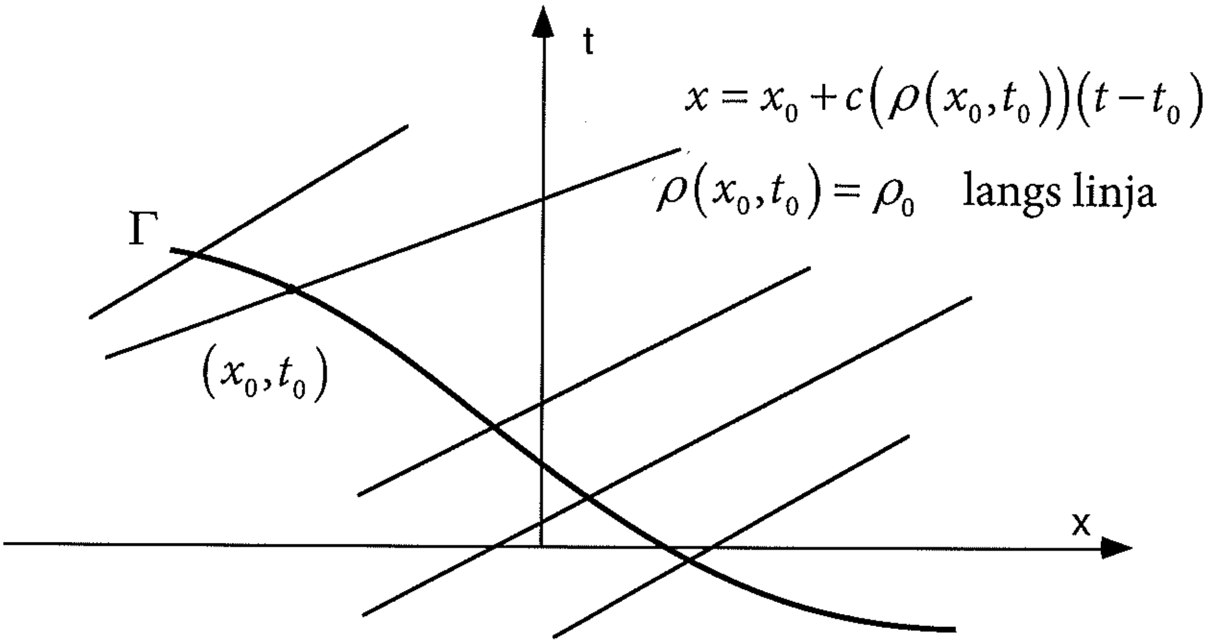
$$P(t,x,\rho) = 1$$
$$Q(t,x,\rho) = c(\rho)$$
$$R(t,x,\rho) = 0$$

Karakteristikkene

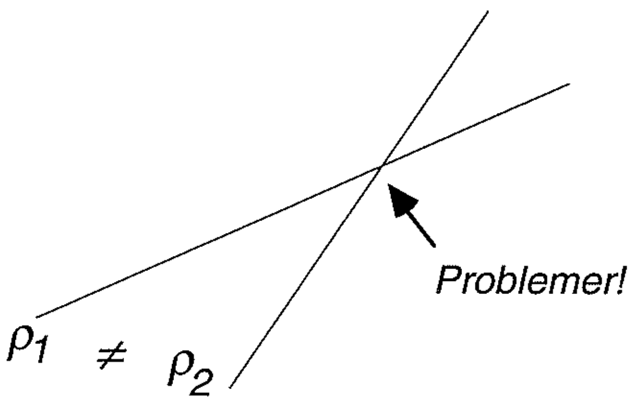
$$\left.\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= P(t,x,\rho) = 1 \\ \frac{dx}{ds} &= Q(t,x,\rho) = c(\rho) \\ \frac{d\rho}{ds} &= R(t,x,\rho) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} t &= t_0 + s \\ x &= x_0 + c(\rho_0)s \\ \rho &= \rho_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + c(\rho_0)(t - t_0) \\ \rho &= \rho_0 \end{aligned}\right.$$

- Karakteristikkene er rette linjer!
- ρ er konstant langs karakteristikkene!

Her vil en ofte nøye seg med å tegne opp projeksjonen av karakteristikkene i (x,t)-planet:

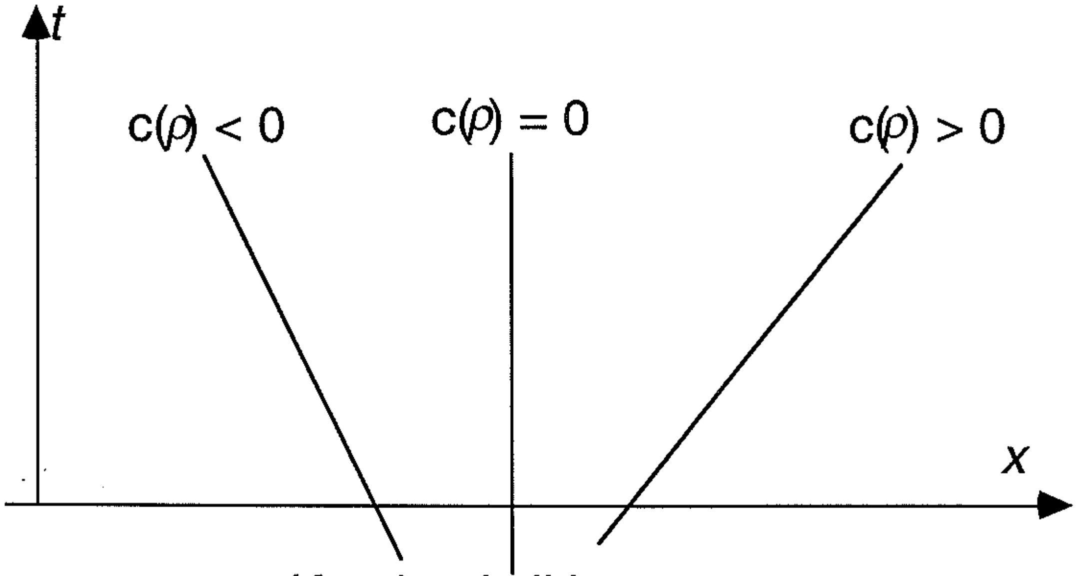


Matematisk er det ingen ting i veien med løsninger som "folder seg" slik at vi får flere mulige verdier på ρ i et punkt (x,t), men *fysisk* er en slik situasjon uakseptabel. Dette skjer når (projeksjonen av) karakteristikkene kolliderer:



Vi ønsker løsninger som er forenlige med bevarelsesloven ligningen kommer fra!

$c(\rho)$ kalles *kinematisk hastighet*



Karakteristikker

$$x = x_0 + c\left(\rho\left(x_0, t_0\right)\right)\left(t - t_0\right)$$

Løsningen i punktet (x_1, t_1) er

$$\rho(x_1, t_1) = \rho(x_0, t_0)$$

der

- $(x_0, t_0) \in \Gamma$
- $x_1 = x_0 + c\left(\rho\left(x_0, t_0\right)\right)\left(t_1 - t_0\right)$

Implisitt,- krever generelt løsning av en ikke-lineær ligning!

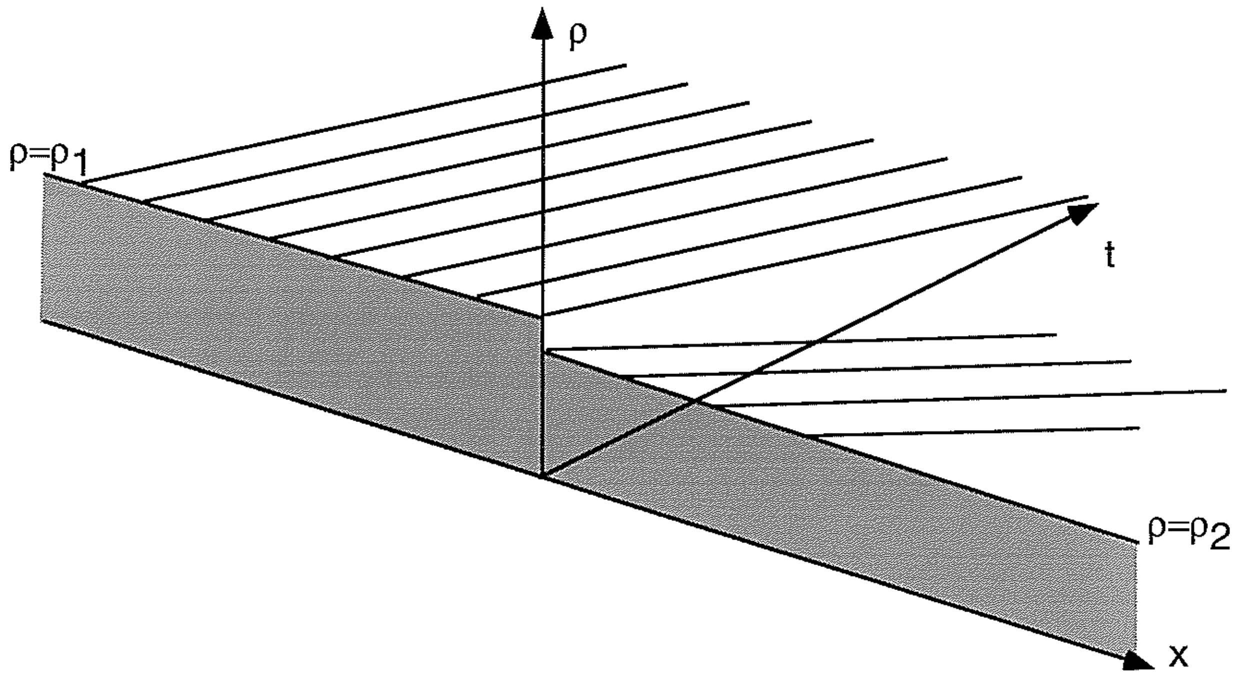
RIEMANNPROBLEMET

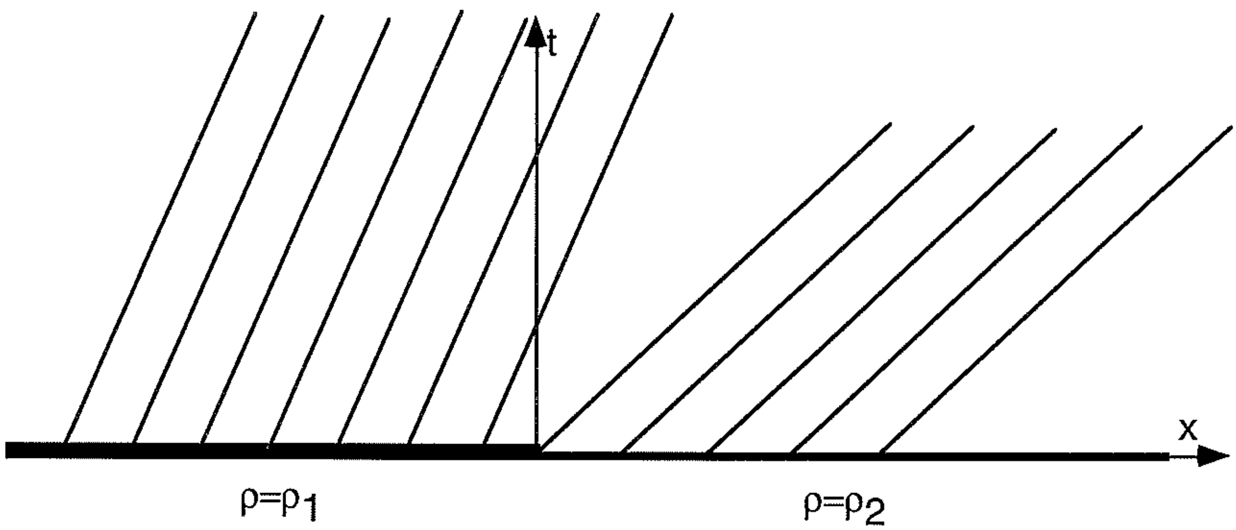
Finn løsningen, $\rho(x,t)$, $t \geq 0$, av $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ når

$$\rho(x,0) = \rho_1 \, , \, x < 0$$

$$\rho(x,0) = \rho_2 \, , \, x > 0$$

- og som er forenlig med bevarelsesloven!

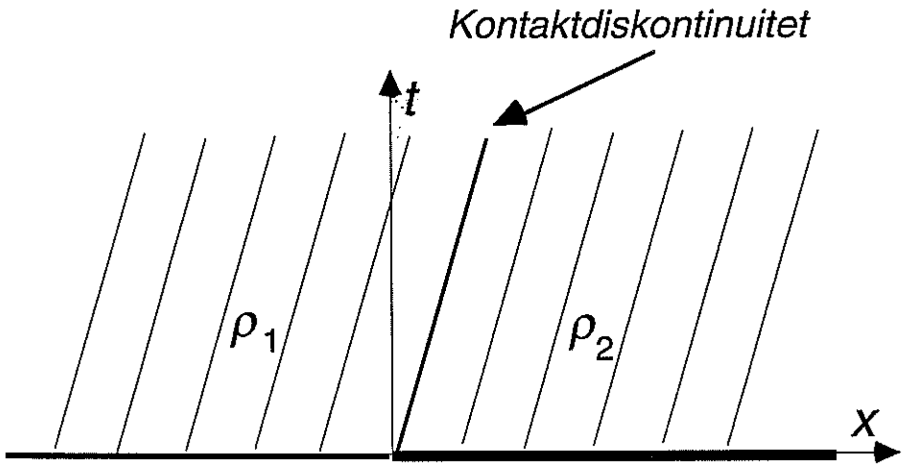




DE TRE ELEMENTÆRE TILFELLENE

1. KONTAKTDISKONTINUITET

$$\boxed{c(\rho_1)=c(\rho_2)=\frac{j(\rho_2)-j(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}}$$



(Betingelsen på differensialkvotienten blir forklart under tilfelle 3)

Eksempel:

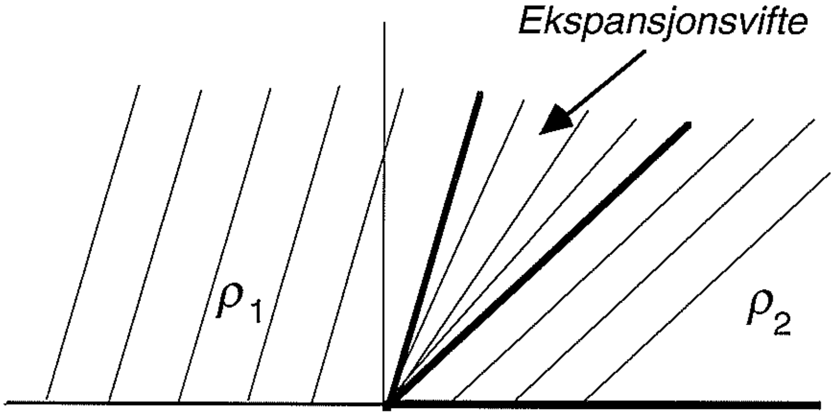
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad c(\rho)\equiv 1$$

Karakteristikkene er $x=x_0+1\cdot t$, og derfor får vi

$$\rho(x,t)=\rho_0(x-t)$$

2. EKSPANSJONSVIFTE

$c(\rho_1) < c(\rho_2)$ og $c(\rho)$ *monoton* (voksende eller avtagende) for ρ mellom ρ_1 og ρ_2.



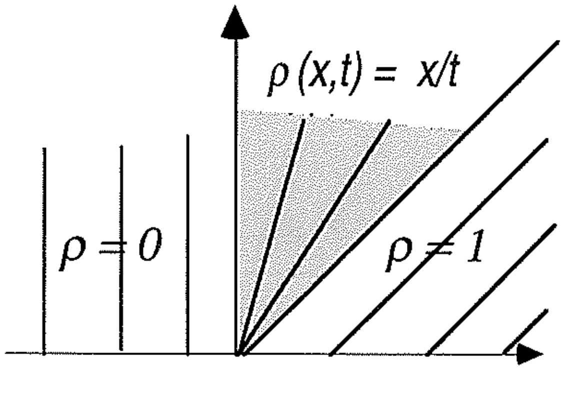
Alle karakteristikkene i viften begynner i origo, dvs. de har ligningen $x = c(\rho)t$. Dermed blir

$$\rho(x,t) = c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$$

(c^{-1} eksisterer når c er monoton!)

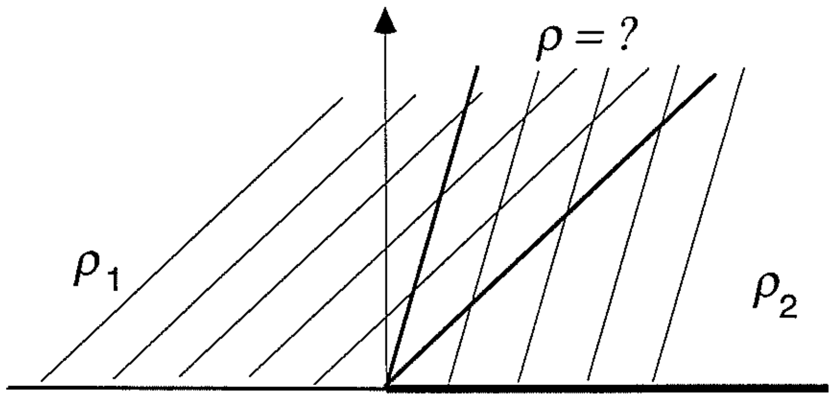
Eksempel:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \ \& \begin{cases} \rho(x,0) = 0 \, , \, x < 0 \\ \rho(x,0) = 1 \, , \, x > 0 \end{cases}$$



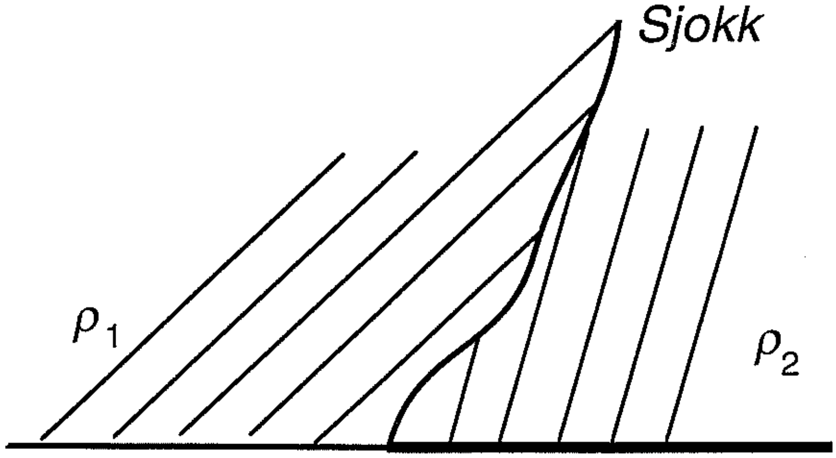
3. SJOKK

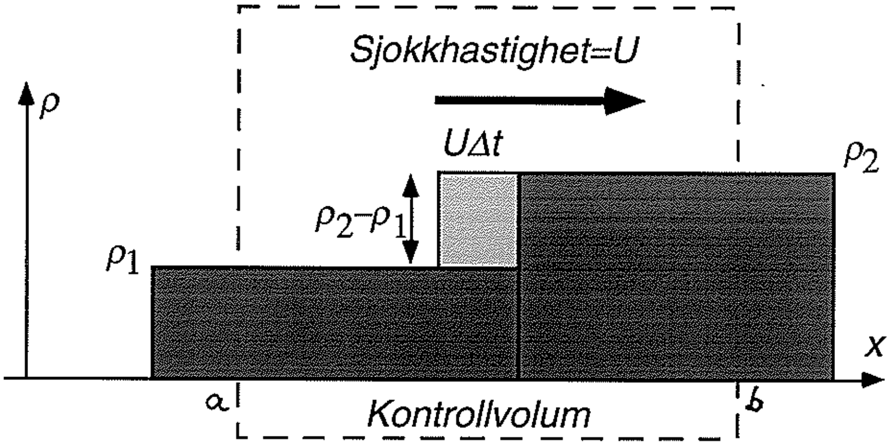
$$\boxed{c(\rho_1) > c(\rho_2)}$$



Det er umulig å finne en akseptabel løsning
uten å bruke bevarelsesloven!

Løsningen krever at vi fører inn en *diskontinuitet*,- et *sjokk*.





Direkte beregning:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-(\rho_2-\rho_1)U\Delta t}{\Delta t} = -(\rho_2-\rho_1)U$$

Innsatt i bevarelsesloven:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx + j(\rho_2) - j(\rho_1) =$$

$$-U(\rho_2-\rho_1) + j(\rho_2) - j(\rho_1) = 0$$

$$\boxed{U = \frac{j(\rho_2)-j(\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)}}$$

Bevarelsesloven *krever* at alle sjokk må tilfredsstille denne ligningen!

Observasjon: Hvis c(ρ) er kontinuerlig, vil

$$U = c(\rho_0)\,,\ \ \rho_0 \in \mathrm{int}[\rho_1, \rho_2]$$

Eksempel:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho^2/2)}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial \rho}{\partial x}=0 \quad \& \quad \begin{cases}\rho(x,0)=1\,,\; x<0\\ \rho(x,0)=0\,,\; x>0\end{cases}$$

OBS: Her må vi *vite* at fluksen har denne formen!

$$U=\frac{j(\rho_2)-j(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}=\frac{0-1^2/2}{0-1}=\frac{1}{2}$$