

# Innhold

<b>1</b>	<b>INNLEDNING</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>SENTRALE BEGREPER</b>	<b>3</b>
2.1	Tetthet . . . . .	3
2.2	Fluks . . . . .	5
2.3	Kilder og sluk . . . . .	7
2.4	Den generelle bevarelsesloven . . . . .	8
2.5	Bevarelsesloven i én romdimensjon . . . . .	9
<b>3</b>	<b>MODELLERING AV VEITRAFIKK</b>	<b>16</b>
3.1	Kinematisk teori . . . . .	17
3.1.1	Trafikklys som skifter til grønt . . . . .	18
3.1.2	Trafikk-kø som tetter seg til . . . . .	19
3.1.3	Når dannes første sjokk? . . . . .	20
3.1.4	Innsnevring av kjørebanelen . . . . .	21
3.1.5	<i>Infinity Street</i> . . . . .	21
3.2	Generaliseringer av kinetisk teori . . . . .	24
3.3	Enkeltbilmodeller . . . . .	29
3.4	Problemstillinger i tilknytning til veitrafikk . . . . .	31
3.4.1	1001-1002-1003-regelen . . . . .	32
3.4.2	Fotgjengerovergang på en rett veistrekning . . . . .	32
3.4.3	Endringer i trafikkforholdene . . . . .	32
3.4.4	Grønn bølge . . . . .	32
3.4.5	T-kryss . . . . .	33
3.4.6	Synchronized flow . . . . .	33
<b>4</b>	<b>BEVARELSSESLOVENE I KONTINUUMSMEKANIKK</b>	<b>33</b>
4.1	Reynolds transportteorem . . . . .	34
4.2	Massebevarelse . . . . .	35
4.3	Impulsbevarelse . . . . .	37
4.4	Energibevarelse . . . . .	40
4.5	Kommentarer og eksempler . . . . .	41
4.5.1	Krefter på rørbend. . . . .	42
4.5.2	Flodbølger i elver . . . . .	43
4.5.3	Det sirkulære vannspranget . . . . .	46
<b>5</b>	<b>DIFFUSJON OG KONVEKSJON</b>	<b>52</b>

5.1	Bevarelsesloven med diffusjon . . . . .	53
5.2	En-dimensjonal kjemisk reaktor . . . . .	54
5.3	Asymptotiske løsninger . . . . .	56
5.4	Utslipp fra et kjernekraftverk . . . . .	57
5.5	Similaritetsløsninger . . . . .	60
5.6	Ikke-lineær diffusjon . . . . .	63
<b>6</b>	<b>MODELLERING AV TURBULENS</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>SKALERING I GEOFYSIKK</b>	<b>67</b>
7.1	Skalering av Navier-Stokes ligninger . . . . .	67
7.2	Reduksjon av dimensjon . . . . .	70
<b>8</b>	<b>APPENDIX: 1. ORDENS PARTIELLE DIFF.-LIGNINGER</b>	<b>74</b>
8.1	Ligninger og løsninger . . . . .	74
8.2	Et eksempel . . . . .	76

# 1 INNLEDNING

I dette notatet skal vi behandle sentrale begreper og angrepsmåter for modeller basert på *bevarelsesprinsipper*. Noe av stoffet vil være relativt enkelt, i alle fall for studenter med litt bakgrunn i fluid mekanikk og partielle differensialligninger. Likevel er det viktig å se at prinsippene er generelle og anvendbare for modellering i mange andre situasjoner enn tradisjonell kontinuumsmekanikk. Det er vanskelig å diskutere bevarelsesprinsipper uten å komme inn på partielle differensialligninger, men vi er her mest interessert i *kvalitativ* teori og generell oppførsel til løsningene, og ikke konkrete analytiske og numeriske løsningsmetoder. Nedenfor er *væske* brukt både om flytende stoff og gasser.

Sist i notatet finnes et ”førstehjelpskurs” som handler om første ordens kvasi-lineære partielle diff.-ligninger. Det er beregnet på lesere uten noe som helst kunnskap om partielle diff.-ligninger utover grunnkursene.

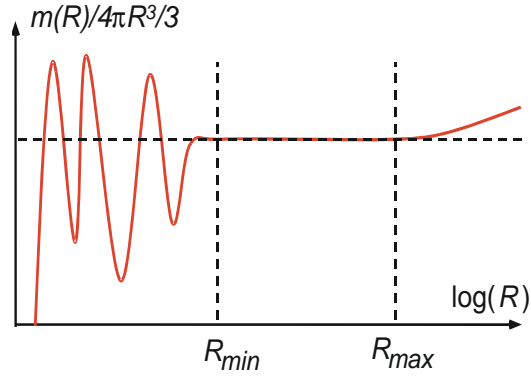
I mange modeller opererer vi med kontinuerlige fordelinger eller tettheter der fenomenet vi betrakter opplagt er diskret, for eksempel tetthet av bakterier, folk, biler, og lignende. Her baserer modellen seg på en slags generalisert *kontinuumshypotese* lignende den en opererer med i kontinuumsmekanikken. Men en slik betraktningssmåte har opplagte begrensninger og det er viktig å kunne vurdere hva modellene er gode for. Det leder for eksempel til absurditeter å tviholde på matematiske definisjoner basert på grenseoverganger. I den fysiske verden er ”0” gjerne det som ligger en størrelsesskala nedenfor og ” $\infty$ ” det som ligger en skala over der vi befinner oss. Når vi for eksempel sier at ” $\Delta x \rightarrow 0$ ”, mener vi egentlig at  $\Delta x$  blir liten i forhold til skalaen der vi befinner oss, og ikke at  $\Delta x$  går mot 0 i matematisk forstand. Tilsvarende er det når vi snakker om stasjonære forhold i tiden fra  $-\infty$  til  $+\infty$ . Innen elementærpartikkelfysikk kan ”evigheten” godt være  $10^{-10}$ s! Skalabetraktninger som vi har vært igjennom hjelper oss til å vurdere påliteligheten i slike antagelser.

Vi må skille mellom det å modellere og det å løse ligningene *etter* at de er satt opp i en matematisk modell. Det siste er temaet for kursene i f.eks. analytisk og numerisk løsning av ordinære og partielle differensialligninger. Selv om entusiaster reklamerer med numeriske programpakker som kan løse enhver oppsatt differensialligning, er det langt fra tilfelle at vi kan overlate til datamaskinen å *forstå* hva som skjer. Etterhvert som de numeriske verktøyene blir stadig mer avanserte, stilles det tvert i mot stadig større krav til matematisk forståelse og analyse av ligningene. Klok av skade forlanger kundene at beregninger basert på numeriske modeller skal kunne dokumenteres som pålitelige. Bare grundig matematisk og numerisk analyse, – og ikke minst fysisk og ingeniørmessig innsikt – kan hjelpe oss med dette. Mange av de analytiske løsningene for idealiserte problemer som vi kjenner fra partielle differensialligninger er nyttige i så måte. Ved hjelp av skalaargumenter kan en vise at fundamentalløsningen til varmeledningssligningen har langt større anvendbarhet enn det som vanligvis nevnes i matematikk-kursene. Med fare for å virke svulstig kan en si at fundamentalløsninger og andre idealiserte løsninger fra matematisk analyse er hjørnesteiner som gir oss innsikt og hjelper oss til å avgrense problemet.

## 2 SENTRALE BEGREPER

### 2.1 Tetthet

Selv om vi til daglig oppfatter for eksempel vann og luft som svært homogene og uniforme medier, vet vi alle at dette bare er målt med vår daglige lengdeskala. Hvis vi slår en tenkt kule med radius



**Figur 1:** Pragmatisk definisjon av tetthet i et punkt.

$r$  og sentrum  $\mathbf{x}$  i luften for et gitt tidspunkt og beregner massen innenfor kula med  $m(r)$ , er den matematiske definisjonen på tettheten i punktet  $\mathbf{x}$

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(r)}{4\pi r^3/3}. \quad (1)$$

Hvis vi virkelig var i stand til å utføre dette eksperimentet og satte forholdet på høyre side opp i en graf som funksjon av  $R$ , ville vi derimot få noe som antydnet på figur 1.

Blir  $R$  mindre enn  $R_{\min}$  (ca.  $10^{-7}\text{m}$  for luften som omgir oss), begynner forholdet å fluktuere, og det har i alle fall ingen mening å snakke om en grenseverdi når  $R$  går mot 0 slik vi tenker på det i matematikk. Hvis  $R$  på den annen side blir for stor, vil også forholdet begynne å endre seg ettersom luften inne i kula blir "inhomogen". Som en forstår, må vi i definisjonen av tetthet legge inn en forutsetning om at vi stopper grenseprosessen på riktig sted, og at vår modell kun har mening for fenomener av større lengdeskala enn denne minste skalaen. Som matematikere er vi nødt til å leve med at tettheten ikke er spesielt "veldefinert". Dette skaper ikke store problemer for luft og vann for de fleste av våre daglige situasjoner, men innen høyvakuumenteknikk kan imidlertid  $R_{\min}$  godt bli av samme størrelsesorden som apparaturen.

La oss betrakte en størrelse som vi beskriver med en tetthet  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ . Mengden innenfor et gitt lukket område  $R$  kan da uttrykkes ved hjelp av *volumintegralet*

$$M(t) = \int_R \varphi(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2)$$

Selv om en umiddelbart tenker på tetthet som mengde pr. volumenhet, er det ingenting i veien for å angi tettheten som mengde pr. flateenhet, hvis vi essensielt er i en todimensjonal situasjon, eller mengde pr. lengdeenhet i en endimensjonal situasjon.

I introduksjonen til [12] har forfatterne to eksempler som illustrerer hvordan det er mulig å føre inn og regne med kontinuerlige medier og tettheter i to ekstreme tilfeller. I det ene eksemplet diskuterer de hvordan spiralstrukturen i galakser kan modelleres som tetthetsbølger i et "gravitasjonsplasma" der galaksen modelleres som et kontinuum karakterisert blant annet av massetettheten av stjerner (C. C. Lin er en av hovedbidragsyterne til denne teorien). I det andre eksemplet diskuterer tetthets-ustabiliteter i en samling amøber under matmangel. Tettheten er her antall amøber pr. flateenhet og regnes også som en kontinuerlig funksjon (Denne modellen og analysen av den ble i sin tid utviklet bl.a. av den andre forfatteren, L. A. Segel).

I matematisk modellering tillater vi oss derfor å snakke om tettheter i mange andre situasjoner enn de vi kjenner fra mekanikk. Tetthet av ulike fremmedelemer, for eksempel forurensninger i en væske, er en aktuell situasjon. Innenfor luftforurensninger regner de mest avanserte modellene med et hundretalls ulike komponenter som hver er karakterisert av sin tetthet, og som vekselvirker i tillegg til at de transporteres, ramler ned eller blandes i luftmassene. Innenfor reservoarteknikk er det samme situasjon for ulike olje- og gass-komponenter.

Når det gjelder *varmeinnhold*, kan en i enkle tilfelle med konstant egenvarme oppfatte temperatur som en tetthet, ellers brukes *entalpi*, (se [5] s.152–3). *Entropitetthet* opptrer også i modeller som har med varmetransport og varmeoverføring å gjøre. Med det samme vi er inne på fysikk, kan vi også nevne *elektrisk ladningstetthet*. Ladningstetthet leder oss bort i noen matematiske problemer (såkalte *singulære tettheter*) som vi skal komme litt tilbake til under avsnittet om kilder og sluk.

I kontinuumsmekanikk kaller en størrelser som passivt “følger strømmen” for *materialvariable*. De vanligste materialvariablene er masse, impuls (bevegelsesmengde), virvling og energi, som i et kontinuerlig medium er beskrevet av

$$\begin{array}{ll}
 \rho & \text{massetetthet (mass density)} \\
 \rho \mathbf{v} & \text{impulstetthet (momentum density)} \\
 \nabla \times \rho \mathbf{v} & \text{virveltetthet (vorticity density)} \\
 e\rho & \text{energitetthet (energy density)}
 \end{array} \tag{3}$$

Forurensninger eller andre tilsetningsstoffer som passivt følger strømmen, er også materialvariable. Konsentrasjonen av plankton i vann er derfor en materialvariabel så lenge det ikke beveger seg på egen hånd. Derimot vil en vanligvis ikke regne sild som en materialvariabel!

Innenfor biologi er det også, som i eksemplet til L.A. Segel, vanlig å operere med kontinuerlige tetthetsfunksjoner av for eksempel dyr, bakterier og planter. På denne måten kan en lage modeller som beskriver bevegelser av dyreflokker, bakteriekulturer, spredning av epidemier og lignende. Vi skal senere se på en situasjon der vi modellerer tetthet av biler langs en vei som et kontinuum. I disse tilfellene opererer modellen på skalaer hvor selv den minste skalaen er stor i forhold til utstrekningen på enkeltindivider.

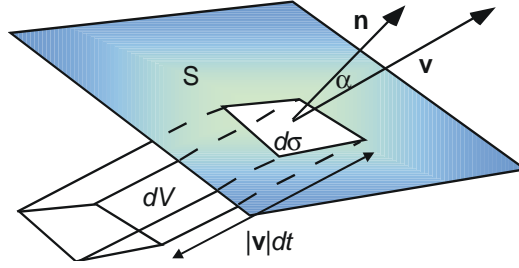
## 2.2 Fluks

*Fluks* er mengde som transporteres eller “strømmer” gjennom en (eventuelt tenkt) flate normalt på transportretningen pr. flate og tidsenhet. Fluks lar seg enklest beskrive som et *vektorfelt*,  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ , der retningen til  $\mathbf{j}$  angir transportretningen. Hvis vi tenker oss et lite (fiktivt) flatelement  $d\sigma$  satt inn i strømmen, vil mengden som passerer gjennom flatelementet avhenge av orienteringen. Orienteringen kan vi angi med normalvektoren  $\mathbf{n}$ , og projeksjonen av flatelementet normalt på transportretningen blir  $d\sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} / |\mathbf{j}|$ . Mengden som passerer gjennom  $d\sigma$  i tiden  $dt$  blir dermed

$$dM = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma dt. \tag{4}$$

Som vi ser, vil uttrykket kunne bli både positivt og negativt alt ettersom hvilken vei  $\mathbf{n}$  peker. Total mengde som strømmer ut av en flate  $\Sigma$  pr tidsenhet finnes fra et *overflateintegral*,

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \tag{5}$$



**Figur 2:** Utledning av uttrykket for fluksen til en materialvariabel.

Som vi husker fra vektoranalysen, er det under visse betingelser mulig å omskrive flateintegralet over overflaten  $\partial R$  til lukkede volum  $R$  ved hjelp av *divergensteoremet*:

$$\int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_R \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (6)$$

For en *materialvariabel* med tetthet  $\varphi$  som befinner seg i et kontinuerlig medium med hastighetsvektorfelt  $\mathbf{v}$ , har fluksen en spesielt enkel form, nemlig  $\mathbf{j} = \varphi \mathbf{v}$ . På figur 2 ser vi at en mengde  $\varphi dV$  vil passere gjennom  $d\sigma$  i løpet av tiden  $dt$ . Enkel vektorregning gir oss at  $dV = d\sigma \cdot |\mathbf{v}| dt \cdot \cos \alpha = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma dt$ . Dermed vil det som passerer  $d\sigma$  pr. tidsenhet kunne skrives

$$dQ = \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (7)$$

Fluksen kan med andre ord skrives  $\mathbf{j} = \varphi \mathbf{v}$ , og den totale strømmen gjennom flata  $\Sigma$  pr. tidsenhet blir

$$Q = \int_{\Sigma} (\varphi \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (8)$$

Det finnes mange modeller for fluks. I en praktisk modelleringssituasjon kan det noen ganger være problematisk å sette opp en god modell (*turbulent spredning* av materiale som vi senere skal komme litt tilbake til, er ennå ikke fullstendig løst, selv etter over 100 års forskningsinnsats). Fra elektrisitetsteori kjenner vi til *Ohms lov* som sier at *fluks av elektrisk strøm*,  $\mathbf{j}$ , er gitt ved  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  der  $\sigma$  er ledningsevnen (generelt en *tensor*) og  $\mathbf{E}$  er feltstyrken. I elektromagnetismen der elektromagnetisk stråling bringer med seg energi, er *energifluksen* knyttet til *Poyntings vektor*,  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

I en helt annen sammenheng kan vi for fjellspportinteresserte nevne uttrykket for volumfluks  $J$  (pr. breddeenheter) av is i en isbre. Dette kan uttrykkes som

$$J(x, t) = a(\rho g \sin \alpha)^m \frac{h(x, t)^{m+2}}{m+2}, \quad (9)$$

der  $a$  er en konstant,  $\alpha$  er helningen på fjellgrunnen,  $\rho$  er tettheten av isen,  $h$  er tykkelsen og  $m \approx 4$ .

Vi nevnte ovenfor at plankton kunne være en materialvariabel. Nå er det kjent at plankton til en viss grad påvirkes av lys som derfor vil sette opp en fluks rettet mot lyskilden. Av de mer kuriøse modeller for fluks finner vi prof. Balchens antagelse om at fisk beveger seg langs gradienten av sin *velbefinnethetsfunksjon*,  $g$ ,  $\mathbf{j} \propto \nabla g$ !

Vi skal senere komme tilbake til andre modeller for fluks, for eksempel *diffusjonsgenerert* fluks.

### 2.3 Kilder og sluk

En *kilde* produserer en viss mengde stoff pr. tidsenhet, og vi kan definere et *sluk* som en kilde med negativ produksjon, slik at vi bare omtaler kilder. Rent matematisk vil en studere en kilde i punktet  $\mathbf{x}_0$  ved å slå en kule  $R$  med radius  $r$  om  $\mathbf{x}_0$ , beregne

$$\int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (10)$$

og se hva som skjer når  $r \rightarrow 0$ . Igjen må vi ha de samme reservasjoner i tankene som vi hadde for definisjon av tetthet. En skiller vanligvis mellom *distribuerte* og *singulære* kilder.

For en distribuert kilde vil grenseverdien for

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma}{4\pi r^3/3} \quad (11)$$

eksistere, og når sentrum i kula varierer, definere en funksjon, en såkalt *produksjonstetthet*,  $q(\mathbf{x}, t)$  som uttrykker produksjon pr. tids- og volumenhet. Produksjonstettheten vil være knyttet til divergensen av fluksfeltet hvis fluksen og divergensen av fluksen er en pen og kontinuerlig funksjon. Da vil divergensteoremet og middelverdisetningen nemlig gi oss

$$\int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_R \nabla \cdot \mathbf{j} dV = (\nabla \cdot \mathbf{j})(\mathbf{x}') \times 4\pi r^3/3, \quad |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0| < r, \quad (12)$$

og følgelig blir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma}{4\pi r^3/3} = \lim_{r \rightarrow 0} (\nabla \cdot \mathbf{j})(\mathbf{x}') = (\nabla \cdot \mathbf{j})(\mathbf{x}_0). \quad (13)$$

For en gitt produksjonstetthet blir den totale produksjonen pr. tidsenhet innenfor et volum  $R$

$$Q(t) = \int_R q(\mathbf{x}, t) dV. \quad (14)$$

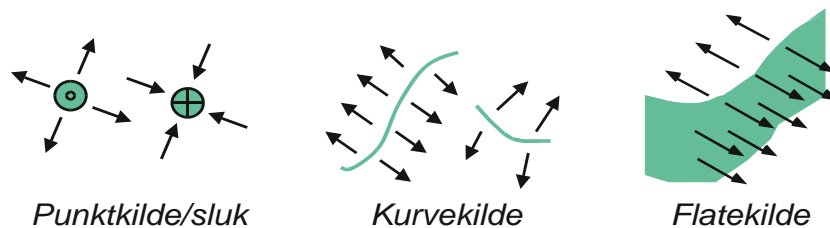
De enkleste *singulære* kildene er *punktkilder*. For punktkilder har vi, som navnet sier, produksjon fra et punkt (dette er naturligvis en *idealisert* situasjon hvor i praksis  $q(\mathbf{x}, t)$  bare er forskjellig fra null i nærheten av punktet). For en punktkilde i  $\mathbf{x}_0$  vil

$$\int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (15)$$

gå mot en konstant når  $r \rightarrow 0$ . Hvis vi skulle beskrive en punktkilde i  $\mathbf{x}_0$  ved hjelp av en produksjonstetthet, måtte denne være 0 for  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ , mens integralet over en vilkårlig omegn omkring  $\mathbf{x}_0$  var forskjellig fra 0. Vanlige funksjoner med denne egenskapen fins ikke, men som kjent har en innført *generaliserte funksjoner* til slik bruken. En punktkilde i  $\mathbf{x}_0$  lar seg beskrive ved hjelp av en såkalt *deltafunksjon*,

$$q(x, t) = Q(t)\delta_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}), \quad (16)$$

der  $Q(t)$  angir produksjonen pr. tidsenhet, og deltafunksjonen angir at produksjonen skjer i punktet  $\mathbf{x}_0$  (En deltafunksjon i  $\mathbf{x}_0$  er definert ved at  $\int f(\mathbf{x})\delta_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})dV = f(\mathbf{x}_0)$  for alle kontinuerlige funksjoner).



**Figur 3:** Singulære kilder kan ta forskjellig form.

Punktkildene er ikke helt utfyllende for kategorien singulære kilder. Ofte vil en ha bruk for å modellere kilder som for eksempel ligger langs en flate eller en kurve i området som betraktes. For eksempel kan en tenke på et område med varmeproduksjon langs en kurve (motstandstråd!) eller en flate, som antydnet på figur 3. Også dette leder matematisk ut av mengden for vanlige funksjoner, men en kan alltid modellere slike kilder som grenser av punktkilder der disse sprer seg utover kurven eller flaten, slik at produksjonen pr. lengdeenhet (eller flateenhet) blir korrekt. Vi overlater til leseren å finne ut hvordan  $\int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  vil oppføre seg når  $r \rightarrow 0$  for kurve- og flatekilder.

I praksis vil det være hensiktsmessig også å inkludere singulære kilder i produksjonstettheten, som da i matematisk forstand vil bli en generalisert funksjon.

Fra fysikk (eller distribusjonsteori i matematikk) vil en muligens kjenne til *dipoler* og *quadrupoler*, som også representerer singulære kilder. Vi vil ikke møte disse i noen av situasjonene vi skal se på.

## 2.4 Den generelle bevarelsesloven

La oss betrakte et lukket område  $R$  av rommet med rand  $\partial R$ . I rommet har et vi stoff med tetthet  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Stoffet beveger seg med en fluks  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t, \rho)$  som vi antar er en funksjon av  $\mathbf{x}$ ,  $t$  og  $\rho$ . Kildene beskriver vi med en *generalisert* produksjonstetthet  $q(\mathbf{x}, t)$  som følgelig altså kan inneholde singulære kilder. Ut fra det vi gått igjennom, ser vi at endringen pr. tidsenhet av mengden inne i  $R$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (17)$$

må være lik *minus* det som forsvinner ut over randa til  $R$  pr. tidsenhet (på grunn av definisjonen av  $\mathbf{n}$  som *ytre* enhetsnormal),

$$- \int_{\partial R} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t, \rho) \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (18)$$

pluss det som produseres (eller eventuelt forsvinner) i  $R$  pr. tidsenhet,

$$\int_R q(\mathbf{x}, t) dV. \quad (19)$$

Tilsammen får vi ligningen

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial R} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t, \rho) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_R q(\mathbf{x}, t) dV. \quad (20)$$



Dette kalles en *bevarelseslov* på *integralform*. Integralene og den deriverte med hensyn på  $t$  i første ledd eksisterer under temmelig generelle betingelser. Ellers er jo en slik bevarelseslov den matematiske formuleringen av at *intet kan forsvinne eller oppstå fra intet*, – en naturlov med overveldende empirisk grunnlag!

Hvis  $\rho$  og  $\mathbf{v}$  er tilstrekkelig glatte og pene funksjoner av  $t$  og  $\mathbf{x}$ , kan vi flytte derivasjonen under integraltegnet og ellers anvende *divergensteoremet*,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_R \rho dV &= \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \\ \int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_R \nabla \cdot \mathbf{j} dV.\end{aligned}\tag{21}$$

Dette betyr i så fall at

$$\int_R \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} - q \right) dV = 0.\tag{22}$$

Hvis  $\rho$  og  $\mathbf{v}$  er glatte og pene i et gitt område av rommet, må en tilsvarende ligning holde for *alle volumer som er delmengder* av dette området (matematisk er det nok å se f.eks. på alle kuler som er delmengder av  $R$ ). Videre, hvis også  $\rho_t + \nabla \cdot \mathbf{j} - q$  er kontinuerlig, er det en setning som sier at i så fall

$$\rho_t + \nabla \cdot \mathbf{j} - q = 0.\tag{23}$$

(Det er enkelt å vise dette ved å anta at integranden,  $\rho_t + \nabla \cdot \mathbf{j} - q$ , er forskjellig fra 0 i punktet  $\mathbf{x}_0$ . Da er også integranden forskjellig fra 0 for alle  $\mathbf{x}$  i en omegn  $R$  omkring  $\mathbf{x}_0$ , siden integranden var forutsatt kontinuerlig. Integralet over denne omegnen blir følgelig også forskjellig fra 0, men dette er i følge forutsetningen ikke mulig). Ligning 23 ovenfor gjelder altså når  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $q$  er glatte nok, og dette er *bevarelsesloven* på *differensialform*.

Siden vi etterhvert skal se eksempler på at en ikke uten videre kan flytte derivasjonen innenfor integralet, er integralformuleringen mer generell og fundamental enn differensialformuleringen.

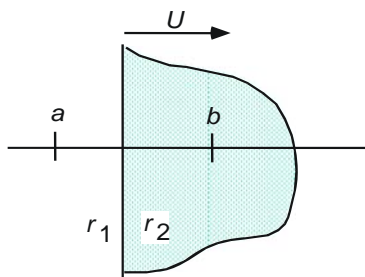
## 2.5 Bevarelsesloven i én romdimensjon

Vi skal diskutere en del egenskaper hos enkle bevarelseslover og begrenser oss til en enkel en-dimensjonal situasjon. Tettheten  $\rho(x, t)$  får nå dimensjonen stoff (eller hva det er snakk om) pr. lengdeenhet. Fluksen  $j(x, t, \rho)$  uttrykker hvor mye av stoffet som passerer punktet  $x$  (i positiv  $x$ -retning) pr. tidsenhet og vil generelt også kunne være en funksjon av  $t$  og  $\rho$ . Merk at fluksen også her egentlig er en vektor rettet langs  $x$ -aksen. Vi skal for enkelhets skyld se bort fra kildeleddet. For et endelig utsnitt  $[A, B]$  av  $x$ -aksen må vi, siden ingenting forsvinner eller blir produsert inne i  $[A, B]$ , kunne sette opp

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \rho(x, t) dx + j(B, t, \rho(B, t)) - j(A, t, \rho(A, t)) = 0.\tag{24}$$

(Merk at enhetsvektoren  $\mathbf{n}$  er  $-\mathbf{i}$  i  $A$  og  $\mathbf{i}$  i  $B$ !). Hvis  $\rho(x, t)$  er en tilstrekkelig glatt funksjon, vil vi for alle mulige delintervaller  $[a, b]$  av  $[A, B]$  ha at

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = \frac{\partial \rho(\xi, t)}{\partial t} (b - a), \quad \xi \in (a, b).\tag{25}$$



**Figur 4:** Bevegelig diskontinuerlig tetthet.

Dermed kan vi skrive

$$\frac{\partial \rho(\xi, t)}{\partial t} + \frac{j(b, t, \rho(b, t)) - j(a, t, \rho(a, t))}{b - a} = 0, \quad (26)$$

som etter en Taylorutvikling av  $j$  i siste uttrykk og grenseovergangen  $a \rightarrow b$  gir oss differensialligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (27)$$

Dette er bevarelsesloven på differensialform som matematisk er en (generelt ikke-lineær) *hyperbolsk partiell differensialligning*.

Følgende enkle (men viktige!) eksempel illustrerer hvorfor en generelt *ikke* kan sette

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx. \quad (28)$$

Et fast medium har en *diskontinuitet* i tettheten fra  $\rho_1$  til  $\rho_2$ . Mediet beveger seg med jevn hastighet  $U$  langs  $x$ -aksen. Anta at intervallet  $[a, b]$  ligger som angitt på figur 4.

Siden fluksen i dette tilfettet er gitt av  $\rho U$ , vil bevarelsesloven (når diskontinuiteten ligger mellom  $a$  og  $b$ ) være

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho dx + \rho_2 U - \rho_1 U = 0. \quad (29)$$

Hvis vi setter *direkte* inn og beregner endringen av stoffmengde mellom  $a$  og  $b$  i første ledd, får vi nettopp

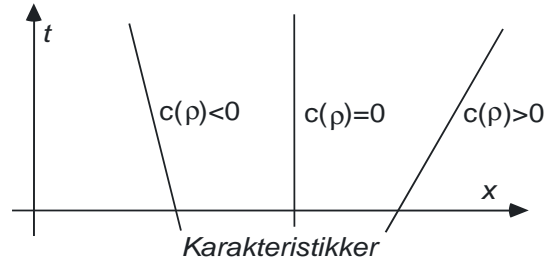
$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_1 U \Delta t - \rho_2 U \Delta t}{\Delta t} = (\rho_1 - \rho_2) U, \quad (30)$$

som stemmer med bevarelsesloven. Derimot vil  $\partial \rho / \partial t$  være lik 0 unntatt på grenseflaten,  $x = x_g$  og

$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int_a^{x_g} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dx + \int_{x_g}^b \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dx = 0 + 0 = 0. \quad (31)$$

Følgelig blir

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dx \neq \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dx. \quad (32)$$



**Figur 5:** Oppførselen til karakteristikkene for ulike kinematisk hastighet,  $c(\rho)$ .

Som vi ser, er dette ikke et spesielt “sært” eksempel, men derimot en situasjon som godt kan forekomme i praksis.

Uten å komme for langt inn i teorien for partielle differensialligninger, skal vi nøye oss med å betrakte en situasjon der  $j$  kun er en kjent, deriverbar funksjon av  $\rho$ . Da reduseres differensialligningen til

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad c(\rho) = \frac{dj}{d\rho}. \quad (33)$$

For å finne løsningen av differensialligningen gjør vi følgende interessante observasjon: Anta at løsningen  $\rho(x, t)$  allerede er kjent. Da kjenner vi også  $c(\rho(x, t))$ . La oss definere vektorfeltet

$$\mathbf{v}(x, t) = \{c(\rho(x, t)), 1\} \quad (34)$$

i  $(x, t)$ -planet. *Feltlinjene* (med kurvelengde-parameter  $s$ ) er definert av ligningene

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= c(\rho(x, t)), \\ \frac{dt}{ds} &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Anta at  $x = p(s)$ ,  $t = q(s)$ ,  $-\infty < s < \infty$  representerer en feltlinje. Variasjonen av  $\rho$  langs feltlinjen finner vi fra

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot c(\rho(x, t)) = 0! \quad (36)$$

Dette betyr at  $\rho$  er *konstant* langs feltlinjene. Følgelig er også  $c = c(\rho)$  konstant langs feltlinjene. Men dette impliserer i sin tur at feltlinjene blir rette linjer. Disse feltlinjene kalles *karakteristikkene* (Strengt tatt er feltlinjene projeksjonen i  $(x, t)$ -planet av karakteristikkene i  $(x, t, \rho)$ -rommet, men det er vanlig praksis å kalle disse også for karakteristikkene). Legg merke til at  $c(\rho(x, t))$  har dimensjon hastighet, og denne størrelsen kalles *kinematisk hastighet*. På en måte, som blir tydeligere etterhvert, kan en si at kinematisk hastighet representerer informasjonshastigheten i problemet vårt.

Hvis vi ønsker å finne løsningen  $\rho(x, t)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq t$  av initialverdiproblemet  $\rho(x, 0) = f(x)$  (et såkalt *Cauchy-problem*), må vi for et punkt  $(x_1, t_1)$  først finne karakteristikkene gjennom punktet. Karakteristikkene har ligninger  $x = x_0 + c(\rho(x_0, 0))t$ , der  $(x_0, 0)$  ligger på  $x$ -aksen. Følgelig må vi først finne en  $x_0$  slik at

$$x_1 = x_0 + c(\rho(x_0, 0))t_1. \quad (37)$$

Som vi ser, må vi løse en implisitt (generelt ikke-lineær) ligning for å finne  $x_0$ . Deretter er  $\rho(x_1, t_1)$  gitt av

$$\rho(x_1, t_1) = \rho(x_0, 0) = f(x_0). \quad (38)$$

Det er bare mulig å skrive løsningen på eksplisitt form i enkle tilfeller.

La oss som et enkelt eksempel betrakte ligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (39)$$

Her er  $c(\rho) \equiv 1$ , slik at karakteristikkene blir linjene i  $(x, t)$ -planet definert av  $x = x_0 + t$ . Dermed får vi  $\rho(x, t) = \rho(x_0, 0) = f(x_0) = f(x - t)$ . Variasjonen i tettheten ved  $t = 0$  flytter seg altså mot høyre med hastighet 1.

La oss igjen betrakte bevarelsesloven på integralform,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx + j(\rho(b, t)) - j(\rho(a, t)) = 0, \quad (40)$$

med differensialformulering

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad c(\rho) = \frac{dj}{d\rho}. \quad (41)$$

For denne bevarelsesloven er det *tre elementære løsninger* som til stadighet dukker opp, og selv om vi finner dette i de aller fleste lærebøker om partielle differensialligninger, for eksempel boka til Whitham [19], skal vi for fullstendighetens skyld liste dem opp. Det dreier seg om løsningene til det såkalte *Riemannproblemet*, der vi ønsker å finne  $\rho(x, t)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq t$  når

$$\rho(x_0, 0) = \begin{cases} \rho_1, & x < 0 \\ \rho_2 & x > 0 \end{cases}, \quad \rho_1 \neq \rho_2. \quad (42)$$

Karakteristikkene vil i dette tilfellet være gitt av

$$\begin{aligned} x &= x_0 + c(\rho_1)t, & x_0 < 0, \\ x &= x_0 + c(\rho_2)t, & x_0 > 0. \end{aligned} \quad (43)$$

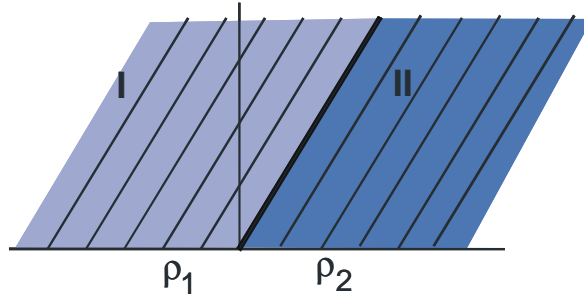
### A. Kontaktdiskontinuitet

Hvis vi (tilfeldigvis) har  $c(\rho_2) = c(\rho_1)$ , vil karakteristikkene bli parallelle både for positive og negative  $x$ . Området  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq t$  deles i to mengder, **I** og **II** (se fig. 6) der løsningen  $\rho$  til differensialligningen er henholdsvis  $\rho_1$  og  $\rho_2$ . Løsningen kalles en *kontaktdiskontinuitet* (eng.: *contact discontinuity*), siden den er diskontinuerlig langs  $x = c(\rho_1)t$ . Pussig nok behøver ikke denne løsningen å være en akseptabel løsning for selve bevarelsesloven. Vi skal se nedenfor at bevarelsesloven bare er oppfylt hvis i tillegg

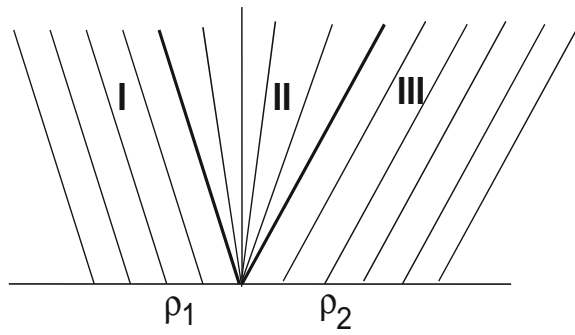
$$(\rho_1 - \rho_2)c(\rho_1) + j(\rho_2) - j(\rho_1) = 0, \quad (44)$$

og dette behøver jo ikke være oppfylt selv om  $c(\rho_1) = j'(\rho_1) = j'(\rho_2) = c(\rho_2)$ . Hvis betingelsen ikke er oppfylt, vil løsningen av bevarelsesloven utvikle seg mer komplisert. Den elementære situasjonen har vi når betingelsen er oppfylt.

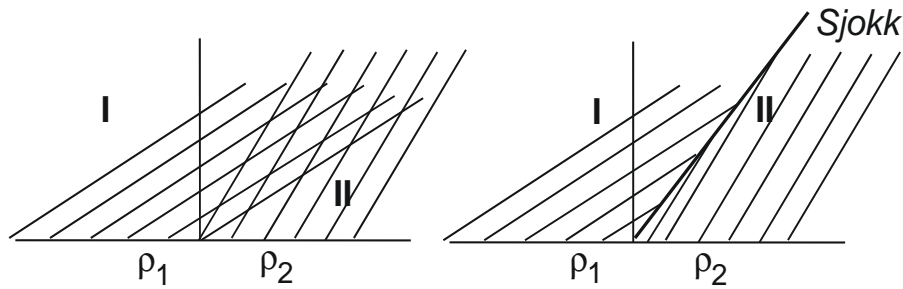
### B. Fortynningsbølge



**Figur 6:** Kontaktdiskontinuitet. Karakteristikkene er parallelle.



**Figur 7:** Ekspansjonsbølge.



**Figur 8:** Når karakteristikkene krysser, får vi et sjokk (en diskontinuitet) i løsningen.

Hvis  $c(\rho_1) < c(\rho_2)$ , vil karakteristikkene som starter utenfor origo gå som på figur 7. Løsningene i områdene **I** og **III** er dermed opplagt. Hvis i tillegg  $c(\rho)$  er *monotont økende* når  $\rho$  går fra  $\rho_1$  til  $\rho_2$ , er løsningen en elementær *ekspansjonsbølge* (på engelsk: rarefaction wave eller *expansion fan*).

I område **II** er den eneste muligheten at karakteristikkene starter i origo. Disse karakteristikkene har alle ligningen  $x = c(\rho)t$ , og følgelig blir løsningen for punktet  $(x, t)$  i område **II** gitt (implisitt) ved

$$\rho(x, t) = c^{-1}(x/t) \quad (45)$$

(Den inverse funksjonen eksisterer jo ifølge forutsetningen om monotonitet). Vi overlater til leseren å vise at *denne* løsningen virkelig oppfyller bevarelsesloven.

Betrakt følgende enkle eksempel der  $c(\rho) = 1 - \rho$ , og  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 0$ . Da blir karakteristikkene  $x = x_0$  for  $x_0 < 0$  og  $x = x_0 + t$  for  $x_0 > 0$ . I område **II** definert ved  $\{(x, t); 0 < x < t\}$  er løsningen gitt av  $x = (1 - \rho)t$ , dvs.  $\rho = 1 - x/t$ . Dermed blir løsningen for  $t > 0$

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x/t, & 0 < x < t \\ 0, & x > t \end{cases} \quad (46)$$

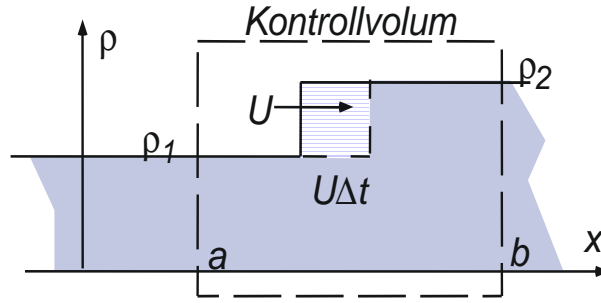
(Tegn opp dette for å se hvordan det forholder seg!)

### C. Sjokk

Hvis vi har den omvendte situasjonen fra B, nemlig at  $c(\rho_1) > c(\rho_2)$ , vil karakteristikkene krysse som illustrert i figur 8 til venstre. Selv om løsningen utenfor kollisjonsområdet kan finnes ved hjelp av karakteristikkemetoden, er dette til liten hjelp inne i området der karakteristikkene krysser. For å komme ut av uføret, må vi gå tilbake til den opprinnelige bevarelsesloven. Vi legger inn en diskontinuitetskurve, kalt et *sjokk*, som illustrert på figur 8 til høyre.

For å bestemme hastigheten  $U$  til sjokket, ser vi på et intervall  $[a, b]$  slik at det omfatter diskontinuiteten for det tidsrommet vi ser på. Ved å beregne endringen av innholdet i  $[a, b]$ , som skissert på figur 9, direkte, får vi

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-(\rho_2 - \rho_1) \times U \Delta t}{\Delta t} = (\rho_1 - \rho_2)U. \quad (47)$$



**Figur 9:** Direkte utregning av endringen pr. tidsenhet av stoff mellom  $a$  og  $b$ .

Bevarelsesloven blir oppfylt *bare* hvis

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx + j(\rho(b, t)) - j(\rho(a, t)) = (\rho_1 - \rho_2)U + j(\rho_2) - j(\rho_1) = 0. \quad (48)$$

(Jevnfør situasjonen i A). Dermed får vi at *sjokkhastigheten* må være

$$U = \frac{j(\rho_2) - j(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (49)$$

og løsningen av problem C for  $t > 0$  blir følgende

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1, & x < Ut \\ \rho_2, & x > Ut. \end{cases} \quad (50)$$

Som en advarsel skal vi vise et enkelt eksempel på at samme differensialligning kan komme fra ulike bevarelseslover. La oss betrakte det endimensjonale tilfellet at tettheten og fluksen avhenger av en annen funksjon  $u$  slik at

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{n} u(x, t)^n, \\ j(x, t) &= \frac{1}{n+1} u(x, t)^{n+1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Bevarelsesloven blir som før

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho dV + j(b, t) - j(a, t) = 0, \quad (52)$$

med differensialformuleringen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (53)$$

Dette gir oss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = u^{n-1} \frac{\partial u}{\partial t} + u^n \frac{\partial u}{\partial x} = u^{n-1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (54)$$

Som vi ser, blir differensialligningen for  $u$  essensielt den samme uansett hvilken  $n$  vi har i bevarelsesloven. Karakteristikkene blir følgelig de samme i alle tilfeller, men sjokkhastighetene i Problem C blir forskjellig for ulike  $n$ :

$$U = \frac{n}{n+1} \frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{u_2^n - u_1^n}. \quad (55)$$

Eksemplet viser at hvis løsningene utvikler sjokk, *kan sjokket ikke finnes fra differensialligningen alene*. Posisjonen for sjokket må bestemmes fra de opprinnelige bevarelseslovene. I noen tilfeller er det også nødvendig å føre inn tilleggsbetingelser som f.eks. at *entropien* skal øke over sjokket for å kunne bestemme en fysisk akseptabel, entydig løsning. Dette blir mer inngående behandlet i kurs i ikke-lineære partielle differensialligninger.

### 3 MODELLERING AV VEITRAFIKK

Systematiske undersøkelser av veitrafikk startet rundt andre verdenskrig. I løpet av femtiåra begynner også matematikere å sitte fast i rush-trafikken, og vi får flere teoretiske arbeider i matematiske tidsskrifter. En artikkel av M.J. Lighthill og G.B. Whitham i Proceedings of the Royal Society med tittelen ”*On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long, crowded roads*” fra 1955 er en av milepælene i utviklingen. Matematisk modellering av veitrafikk er et relativt omfattende fagfelt, og det fins mye informasjon på *Internett* og i flere bøker.

Høsten 2001 var trafikk tema for modelleringseminaret, og dette kapitlet er en omarbeidet versjon av et notat som ble utgitt i forbindelse med seminaret.

Det lokale fagmiljøet ved NTNU finnes på *Inst. for samferdselsteknikk* der det foreleses dr. ing.-fag om trafikmodellering. Kurset bruker en ”state-of-the-art” rapport utgitt av Transportation Research Board, *Traffic Flow Theory* (Ed. N. Gartner, C.J. Messer, A.K.Rathi). Hele rapporten er, når dette skrives, tilgjengelig fra <http://www.tfhr.gov/its/tft/tft.htm>.

Det har ikke vært mulig å finne trafikkmålinger i sann tid, og sannsynligvis vil slik informasjon kun være kommersielt tilgjengelig.

*Schrödingers katt* hadde 7. april 2000 et innslag om trafikk som gikk ut på at mellom 20–30 prosent av bilkøene på norske veier vil forsvinne hvis hver enkelt bilfører kjørte mer effektivt. Under kontrollerte forsøk hadde forskere ved Inst. for samferdselsteknikk greid å doble fluksen fra 1800 til 3600 kjøretøyer pr. time ved å justere kjørernes atferd! Interessant nok hevder forskerne at det noen ganger kan avvikles mer trafikk i 60 km/t enn i 90. Prof. Stein Johannessen på Inst. på Samferdselsteknikk forteller at på ringveien rundt London, **M25**, justeres fartsgrensene kontinuerlig for å optimalisere trafikk-flyten.

Trafikk-modellering kan angripes fra mange sider og med mange ulike typer matematisk og statistisk verktøy. I første omgang er det naturlig å tenke på modeller av enkeltbiler på et veinett, der farten uttrykkes som en funksjon av veiens beskaffenhet og andre biler i nærheten. Modellene kan med fordel inneholde stokastiske elementer som variasjoner i kjørernes oppfatning av ”trygg hastighet”, ”sikker avstand til foranliggende kjøretøy” og ”akseptabel forbikjøringsmargin”. Slike modeller blir raskt analytisk kompliserte, men er velegnet for simulering på datamaskin. Køteori og andre statistiske modeller som beskriver tilfeldighetene i virkelig trafikk, er også mye brukt.

Artikkelen til Lighthill og Whitham bringer inn en kontinuumsmodell for biltrafikk. Trafikkstrømmen beskrives med begreper som tetthet, fluks, kilder og sluk, og leder følgelig til hyperbolske bevarelseslover. Denne teorien kalles kinematisk teori. Modellene kan raffineres ved at en bygger



inn bilistenes evne til å reagere på endringer i trafikktettheten, samt hvor raskt de kan tilpasse farten etter forholdene. Stoffet nedenfor er i hovedsak hentet fra bøkene til Whitham og Haberman angitt i referanselisten.

### 3.1 Kinematisk teori

I kinematisk trafikkteori blir biltrafikk modellert ved hjelp av en enkel bevarelseslov. Tettheten  $\rho(x, t)$  av biler langs veien uttrykker biler pr. lengdeenhet. Begrepet må naturligvis oppfattes noe pragmatisk, slik som ofte er tilfelle når vi modellerer høyst diskrete objekter som et kontinuerlig medium. Vi oppfatter  $\rho$  som en stykkevis kontinuerlig funksjon av posisjon og tid. På grunn av bilenes endelig størrelse, er det rimelig å anta at

$$0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, \quad (56)$$

der  $\rho_{\max}$  er maksimal tetthet som beregnes fra bilenes gjennomsnittslengde.

Bilhastigheten  $v$  antas å være en funksjon av biltettheten,  $v(\rho)$ , slik at  $v(0) = v_{\max}$  og  $v(\rho_{\max}) = 0$ . Det er naturlig å anta at  $v$  avtar når  $\rho$  øker. En relativt entydig hastighet som funksjon av tetthet kan muligens forsvares på en-feltsveier, men anvendes også på flerfelts motorveier, der hastighetene varierer individuelt og fra felt til felt. I dette tilfelle må en oppfatte  $v$  som en middelhastighet, og målingene tyder på at det er en akseptabel antakelse, i alle fall for en del av intervallet mellom 0 til  $\rho_{\max}$ .

Hvis vi antar at hastigheten på bilene er en funksjon av  $\rho$ ,  $v(\rho)$ , vil et enkelt argument gi oss at fluksen av biler, dvs. det antall biler som passerer et gitt punkt på veien pr. tidsenhet, kan uttrykkes som

$$J = \rho v. \quad (57)$$

I trafikkklitteraturen er fluks ofte betegnet med symbolene  $k$  eller  $F$ , og grafen av  $J$  som funksjon av  $\rho$  kalles *fundamentaldiagrammet*. Normalt vil  $J(\rho) \rightarrow 0$  når  $\rho$  går mot 0 eller  $\rho_{\max}$ , og være en *konkav* funksjon med én maksimumsverdi mellom 0 og  $\rho_{\max}$ . Bevarelsesloven blir på vanlig måte

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx + J(b, t) - J(a, t) = \int_a^b q(x, t) dx, \quad (58)$$

der kildeleddet uttrykker av- og innpå-kjørsler. Differensialformuleringen leder til en første ordens hyperbolsk ligning, og siden  $J$  kun er en funksjon av  $\rho$ , kan vi skrive ligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dJ}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = q. \quad (59)$$

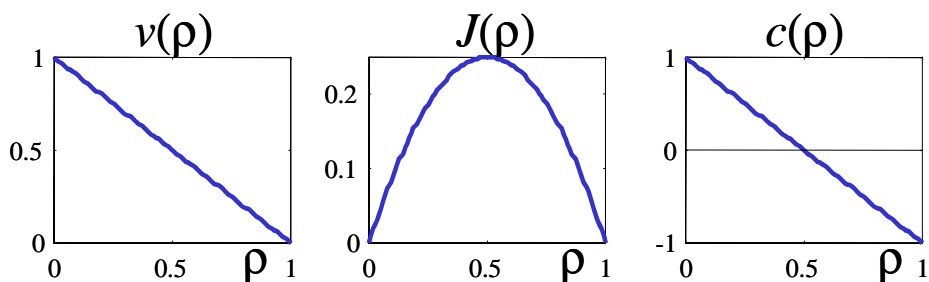
Hvis  $q = 0$ , blir karakteristikkene rette linjer med stigningskoeffisient (kinematisk hastighet) lik  $c(\rho) = \frac{dJ}{d\rho}$ .

Ved å betrakte ligningene (58) og (59), kan vi undersøke hva som skjer rundt et lyskryss når vi har fått en fortetning i trafikken, hvordan de enkelte bilene beveger seg, etc. Bilenes egen bevegelse bestemmes av diff.-ligningen

$$\frac{dx}{dt} = v(\rho(x, t)). \quad (60)$$

Vanligvis vil også  $c(\rho)$  være en avtagende funksjon av  $\rho$ . Dette vil typisk lede til situasjoner som utvikler sjokk hvis trafikken beveger seg i positiv  $x$ -retning samtidig som  $\rho$  øker med  $x$ . Ut fra bevarelsesloven må et sjokk  $x = s(t)$  tilfredssette

$$\frac{ds}{dt} = \frac{J(s+, t) - J(s-, t)}{\rho(s+, t) - \rho(s-, t)}, \quad (61)$$



**Figur 10:** Hastighet, fluks og tetthet som funksjon av biltettheten for standardmodellen.

I teorien for hyperbolske bevarelseslover kalles dette en *Rankine-Hugoniot*-betingelse.

Endringer i trafikforholdene kan bygges inn på flere måter. Hvis veien har en innsvevring, for eksempel går fra to til ett felt, er det naturlig at  $\rho_{\max}$  reduseres, mens  $v_{\max}$  forblir uendret. Dette endrer følgelig fundamentaldiagrammet. I overgangen må fluksen være kontinuerlig, mens  $\rho$  vil ha sprang. Hvis kjørebanen blir glatt, sikten blir dårlig pga. regn eller snø og liknende, vil  $v_{\max}$  bli mindre, mens  $\rho_{\max}$  forblir uendret. Dette endrer fundamentaldiagrammet på en annen måte.

En svært vanlig kinematisk modell som er rimelig enkel å arbeide med analytisk, er å anta at  $v$  er en lineær funksjon av  $\rho$ . Etter skalering får vi ligningene

$$\begin{aligned} v(\rho) &= 1 - \rho, \\ J(\rho) &= \rho(1 - \rho), \\ c(\rho) &= 1 - 2\rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (1 - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{62}$$

Figur (10) viser hvordan bilhastigheten, fluksen og kinematisk hastighet varierer. Legg merke til at  $c(\rho) = \frac{d}{d\rho}(\rho v) = v + \rho v'(\rho)$ , og følgelig blir  $c(\rho) \neq v(\rho)$  når  $\rho \neq 0$ . Nedenfor skal vi bruke denne modellen til å analysere noen enkle situasjoner.

### 3.1.1 Trafikklys som skifter til grønt

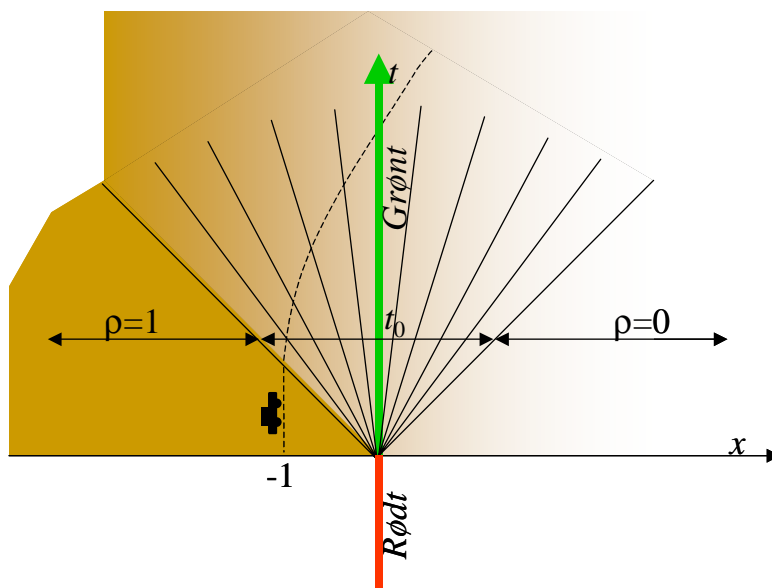
Anta at det i  $x = 0$  har vært rødt lys for  $t < 0$ . Til venstre for krysset ( $x < 0$ ) står det da tett med biler ( $\rho = 1$ ), mens det til høyre ikke er noen biler ( $\rho = 0$ ). I alle slike problemer er det nyttig å skissere et såkalt  $x/t$ -diagram som beskriver forholdene, spesielt hvordan karakteristikkene går, se fig. 11.

Når  $t > 0$  får vi tre områder. Til venstre er det et område der  $\rho = 1$ , til høyre et område der  $\rho = 0$ , mens vi i midten får en ekspansjonsbølge med karakteristikker

$$x = c(\rho)t = (1 - 2\rho)t. \tag{63}$$

Dermed blir i dette området  $\rho = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t}\right)$ , og den fullstendige løsningen blir for  $t = t_0$ :

$$\rho(x, t_0) = \begin{cases} 1, & x \leq t_0, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t_0}\right) & -t_0 < x < t_0, \\ 0 & x \geq t_0. \end{cases}$$



**Figur 11:** Lyskryss i  $x = 0$  der lyset skifter fra rødt til grønt.

Anta at du står et stykke bak i bilkøen for  $t = 0$ . Hvordan blir da din egen bevegelse? La oss si du står i  $x = -1$ . Utfra figur (11) vil du starte å kjøre ved  $t = 1$ , og da vil din egen bevegelse,  $y(t)$ , styres av differensialligningen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v(\rho) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{t}\right), \quad y(1) = -1. \end{aligned} \quad (64)$$

Ligningen blir følgelig  $2ty - y = t$ , med generell løsning  $y(t) = At^{1/2} + t$ , og  $y(t)$  er gitt ved  $y(t) = t - 2t^{1/2}$ . Det er verdt å merke seg at avstanden til teten,  $x = t$ , blir større etterhvert som tiden går.

Situasjonen vi har analysert, minner også om fellesstart på ski, så hvis en har ambisjoner om å hevde seg i teten, gjelder det å aksle seg lengst mulig fram i hopen før starten går!

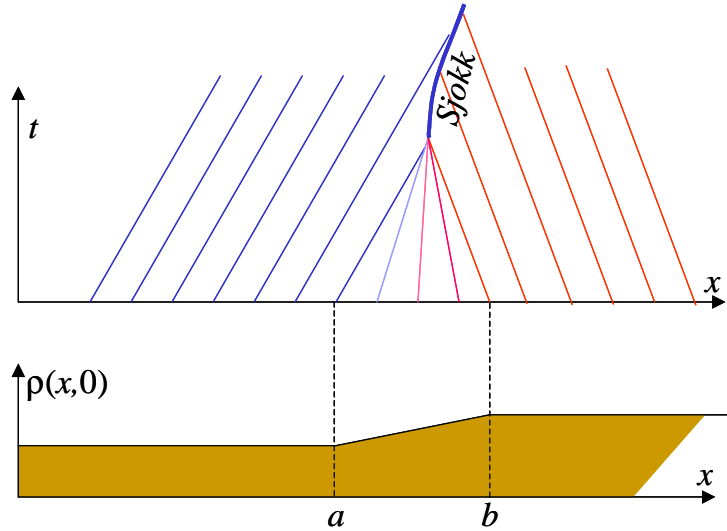
### 3.1.2 Trafikk-kø som tetter seg til

Anta at det går en kø på veien slik at tettheten ved  $t = 0$  har formen

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_1, & x \leq a, \\ \rho_1 + \frac{x-a}{b-a} (\rho_2 - \rho_1) & a < x < b, \\ \rho_2 & b \leq x. \end{cases} \quad (65)$$

Mellom  $x = a$  og  $x = b$  øker altså biltettheten lineært fra  $\rho_1$  til  $\rho_2$ . Karakteristikkene er gitt ved  $x = x_0 + (1 - 2\rho)t$ , og mellom  $a$  og  $b$  får vi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t - 2 \left( \rho_1 + \frac{x_0 - a}{b - a} (\rho_2 - \rho_1) \right) t \\ &= x_0 + (1 - 2\rho_1)t - 2 \frac{x_0 - a}{b - a} (\rho_2 - \rho_1) t. \end{aligned} \quad (66)$$



**Figur 12:** Situasjonen med en foretting av biltettheten.

Ved å sette inn tidspunktet  $t_s = \frac{1}{2} \frac{b-a}{\rho_2 + \rho_1}$  ser vi at  $x_0$  faller bort. Dette betyr at alle karakteristikkene som starter mellom  $a$  og  $b$  møtes i punktet  $(x_s, t_s)$ ,

$$x_s = a + (1 - 2\rho_1) \frac{1}{2} \frac{b-a}{\rho_2 + \rho_1} = b + (1 - 2\rho_2) \frac{1}{2} \frac{b-a}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (67)$$

Situasjonen er skissert i fig. (12).

For  $t > t_s$  vil vi få et sprang i tettheten, et *sjokk*. Hastigheten til sjokket må vi bestemme fra sjokk-betingelsen,

$$\begin{aligned} U &= \frac{J(\rho_2) - J(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \\ &= \frac{\rho_2(1 - \rho_2) - \rho_1(1 - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \\ &= 1 - \rho_1 - \rho_2. \end{aligned} \quad (68)$$

En kan fundere på hva som skjer rundt et slikt sjokk, og strengt tatt behøver ikke bilene kollidere. Likevel, når en kjører gjennom sjokket ovenfor, vil ens egen hastighet ha en diskontinuitet, og det er jo grenser for hvor raskt det er mulig å reagere!

### 3.1.3 Når dannes første sjokk?

Sjokket dannes første gang to karakteristikker kolliderer. Vi ser på to karakteristikker som starter i henholdsvis  $x_0$  og  $x_0 + \Delta t$  og møtes i  $(x_s, t_s)$ :

$$x_0 + c(x_0)t_s = x_0 + \Delta t + c(x_0 + \Delta t)t_s, \quad (69)$$

dvs.,

$$t_s = -\frac{1}{(c(x_0 + \Delta t) - c(x_0)) / \Delta t}. \quad (70)$$

Område	$\rho$	$v(\rho)$	$J(\rho)$	$c(\rho)$
$x < 1$	$[0 \ 1]$	$1 - \rho$	$\rho(1 - \rho)$	$1 - 2\rho$
$x > 1$	$[0 \ \frac{1}{2}]$	$1 - 2\rho$	$\rho(1 - 2\rho)$	$1 - 4\rho$

**Tabell 1:** Forholdene rundt en innsnevring av veibanen.

Når  $\Delta t \rightarrow 0$ , blir følgelig  $t_s = -1/\frac{dc}{dx}|_{x_0}$ . For at det skal dannes sjokk for  $t > 0$ , må det finnes steder der  $\frac{dc}{dx}|_{x_0} < 0$ , og første tidspunkt dette skjer blir

$$\min t_s = -\frac{1}{\min_x \frac{dc}{dx}}. \quad (71)$$

### 3.1.4 Innsnevring av kjørebanelen

På en vei med to kjørebaneler for  $x < 1$  er den ene kjørebanelen stengt for  $x > 1$ , slik at maksimal biltetthet for  $x > 1$  bare blir halvparten av den opprinnelige. Tabell (1) viser hvordan fluksen varierer med tettheten for hvert av de to områdene. I  $x = 1$  kan det ikke lagres biler. Derfor må fluksen forbi  $x = 1$  være kontinuerlig,

$$J(\rho(1-, t)) = J(\rho(1+, t)). \quad (72)$$

Dette innebærer at tettheten blir diskontinuerlig (hvis den er forskjellig fra 0). Hvis spesielt antallet biler som passerer  $x = 1$  er så stort som mulig, vil fluksen være  $J = 1/8$ , og tetthetene umiddelbart til venstre og høyre for  $x = 1$  er gitt av

$$J(\rho^-) = \rho^- (1 - \rho^-) = J(\rho^+) = \rho^+ (1 - 2\rho^+). \quad (73)$$

Følgelig blir

$$\rho^+ = 1/4, \quad (74)$$

mens det er to muligheter for  $\rho^-$ ,

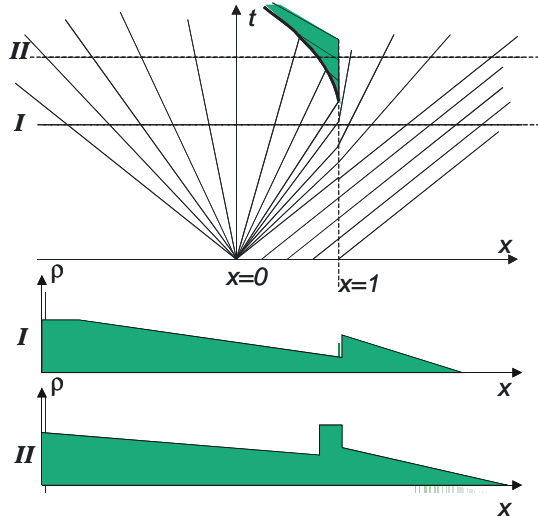
$$\rho^- = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (75)$$

For å se hvordan begge mulighetene kan opptre, kobler vi denne situasjonen med et lyskryss i  $x = 0$ , som i det første eksemplet. Situasjonen er illustrert i fig. (13).

Vi får et sjokk ved  $x = 1$  helt til tettheten på venstre side når  $\rho$  når verdien  $\rho_1^- = \frac{1}{2} (1 - 2^{-1/2})$ . Deretter får vi et plutselig sprang i tettheten til  $\rho_2^- = \frac{1}{2} (1 + 2^{-1/2})$ . Før innsnevringen danner det seg en kø der tettheten er  $\rho_2^-$ , og denne køen får i bakkant et annet sjokk som beveger seg bakover. Vi overlater til leserne å finne ut hvordan det er å kjøre gjennom en slik situasjon. Under utbyggingen av E6 i Okstadbakkene kunne vi observere dette i lang tid.

### 3.1.5 Infinity Street

I Holtermannsveien skal trafikk-lysene være koordinert i en *grønn bølge*. Er det mulig å effektivisere trafikken ved hjelp av grønne bølger, og hvor mye er det maksimalt mulig å få gjennom? I modelleringseminaret tok vi opp en akademisk situasjon som viste seg å gi noen overraskende svar.



**Figur 13:** Innsnevring av kjørebanelen et stykke etter et lyskryss.

På *Infinity Street* ligger fotgjengerovergangene med konstant avstand  $L$ . Det er ingen sidegater med muligheter for av- og innpå-kjørslar. Fotgjengerovergangene er alle lysregulerte med en sykkel av lengde  $S$ . Det betyr at det er rødt i perioden  $[0, r^*)$ , deretter er det grønt i perioden  $[r^*, S)$ , og dette gjentar seg periodisk. For å lette kjøringen, kan lysene forskyves i forhold til hverandre, slik at sykkelen for kryss  $(k + 1)$  starter en viss tid før eller etter sykkelen for kryss  $k$ . Kjøretøyenes maksimale tetthet er  $\rho_{\max}$ , og hastigheten er  $v_{\max}$ . Trafikken følger den enkle kinematiske modellen med lineær hastighet som funksjon av tettheten. Ved å skalere på vanlig måte for  $x$  og  $\rho$ , og bruke tidsskalaen  $L/v_{\max}$ , får vi lign. (62).

Lengden på rødperioden betegnes  $r$  og grønnprioden  $g$ . Her vil  $r = 1$  tilsvare korteste tid det tar å kjøre mellom to trafikklys med lengde 1, og sykkel-lengden blir  $r + g$ . Trafikken går hele døgnet, og problemet er å maksimalisere gjennomsnittlig fluks,  $\bar{J}$ . Hvis rød periode starter i  $x = 0$  for  $t = 0$ , vil gjennomsnittlig fluks bli

$$\bar{J} = \frac{1}{r + g} \int_0^{r+g} J(0, t) dt = \frac{1}{r + g} \int_r^{r+g} \rho(0, t) [1 - \rho(0, t)] dt. \quad (76)$$

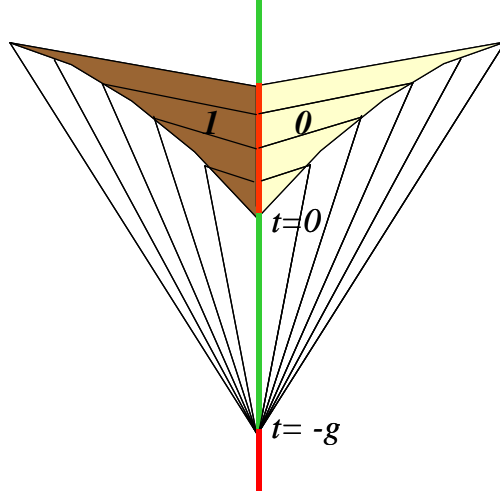
Det er klart at den teoretisk maksimale gjennomstrømningsfluks som kan gå på *Infinity Street* er

$$\bar{J}_{\max} = \frac{g}{r + g} J_{\max} = \frac{g}{r + g} \frac{1}{4}. \quad (77)$$

I dette tilfellet går det med andre ord en *maksimal* fluks,  $J_{\max}$ , gjennom krysset i *hele* grøntperioden, og noe bedre enn det er det umulig å få til. Det viser seg overraskende nok at det er enkelt å lage løsninger som oppfyller dette kravet for alle forhold  $r/g$ , og som altså er optimale i matematisk forstand. Men som også ofte er tilfelle, har disse løsningene begrenset praktisk interesse siden de stiller bilførerne overfor umulige krav.

Vi skal først analysere en enklere situasjon med ett lyskryss, som vi deretter benytter til å lage en fullstendig løsning.

Fram til tiden  $t = -g$  har det vært rødt i  $x = 0$ . Til venstre for  $x = 0$  står det en lang bilkø. Så blir lyset grønt til  $t = 0$  der det igjen skifter til rødt. Ut fra  $(0, -g)$  vil det dannes en



**Figur 14:** Ekspansjonsbølge fra  $(0, -g)$  kolliderer med sjokkene som starter i  $t = 0$ . Karakteristikkene i områdene  $\rho = 0$  og  $1$  har hastighet henholdsvis  $1$  og  $-1$ .

ekspansjonsbølge som kolliderer med sjokk ut fra  $(0, 0)$  i både positiv og negativ  $x$ -retning, som vist på figur 14. Sjokkhastigheten er i dette tilfellet

$$U = \frac{J_2 - J_1}{\rho_2 - \rho_1} = 1 - (\rho_1 + \rho_2). \quad (78)$$

Tettheten på to karakteristikk som ligger symmetrisk om  $t$ -aksen vil være henholdsvis  $\rho^+ = \frac{1}{2} - \sigma$  og  $\rho^- = \frac{1}{2} + \sigma$ . Dermed blir de to sjokkhastighetene de samme med motsatt fortegn:

$$\begin{aligned} U^+ &= 1 - (0 + \frac{1}{2} - \sigma) = \frac{1}{2} + \sigma, \\ U^- &= 1 - (1 + \frac{1}{2} + \sigma) = -\left(\frac{1}{2} + \sigma\right). \end{aligned} \quad (79)$$

Følgelig blir de to sjokk-kurvene *også* symmetriske om origo. Vi kan beregne sjokk-kurven for  $x \geq 0$  fra

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= U^+(x_s, t) = 1 - \rho^+ \\ &= 1 - c^{-1} \left( \frac{x_s}{t+g} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x_s}{t+g} \right), \end{aligned} \quad (80)$$

eller

$$2(t+g)\dot{x}_s = (t+g) + x_s. \quad (81)$$

Løsningen blir

$$x_s(t) = t + g - g^{1/2}(t+g)^{1/2}. \quad (82)$$

Sjokkene følger denne kurven til de møter karakteristikkene som har startet i  $t = r$ , med andre ord, umiddelbart etter at rød-perioden fra  $t = 0$  til  $r$  er over. Områdene med  $\rho = 0$  og  $\rho = 1$  er følgelig også *symmetriske* om  $y$ -aksen.

La oss nå se på en situasjon der rødperioden fra  $x = 0$  har vart så lenge at områdene på figur (14) rekker ut til  $x = \pm\frac{1}{2}$ . Vi finner ut hvor  $(\pm\frac{1}{2}, t_0)$  ligger ved først å observere at

$$\frac{1}{2} = 0 + c(0)(t_0 - r),$$

dvs.

$$t_0 = r + \frac{1}{2} \frac{1}{c(\rho = 0)} = r + \frac{1}{2}. \quad (83)$$

Deretter setter vi inn i ligningen for sjokket,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= (t_0 + g) - g^{1/2} (t_0 + g)^{1/2} \\ &= \left( \left( r + \frac{1}{2} \right) + g \right) - g^{1/2} \left( \left( r + \frac{1}{2} \right) + g \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (84)$$

eller

$$g = \frac{2r^2}{\frac{1}{2} - r}. \quad (85)$$

Løsningen forutsetter at  $r < 1/2$ , og ellers er  $g = r$  for  $r = 1/6$ . For disse kombinasjonene av  $g$  og  $r$  kan vi nå konstruere en full løsning for Infinity Street som for *ethvert gitt forhold*  $r/g \in R^+$  gir oss *maksimal gjennomstrømning*. Konstruksjonen vises best på en figur, se figur 15. Legg merke til at vi har fått et ubevegelig sjokk for halv-tallige  $x$  (Sjokkhastigheten for dette blir 0, siden summen av tetthetene på begge sider er 1 til enhver tid). Hvis vi ønsker at  $r/g$  er stor, gir dette svært korte sykler. Selv den maksimale rødperiode,  $r = 1/2$ , som tilsvarer tiden det tar å tilbakelegge halvparten av strekningen mellom to trafikklys med maksimal hastighet, synes å være temmelig kort for praktiske formål. Det viser seg at den symmetriske konstruksjonen kan generaliseres:

- Ved kortere avstand mellom kryssene vil "løvbladene" kappes og møtes på midten.
- Ved lengre avstand forlenges "løvbladene" med to sjokk som også møtes på midten.

Er det mulig å ha en løsning som ser ut som på fig. 16?

### 3.2 Generaliseringer av kinetisk teori

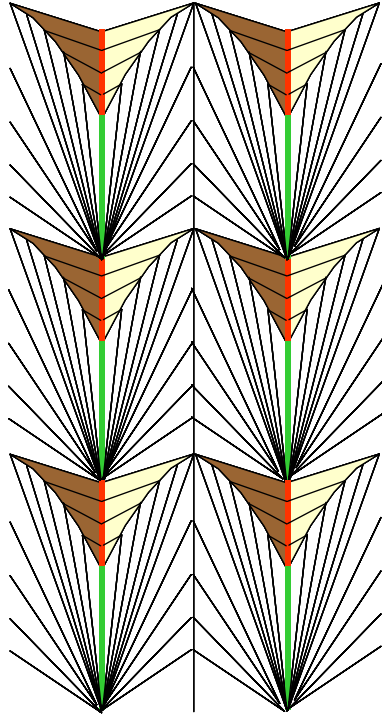
I praksis vil bilistene forsøke å kompensere for endringer i trafikk tettheten ved å justere hastigheten etter forholdene. For å unngå at det utvikles sjokk og dermed ekstremt raske endringer i tettheten, vil de slakke av på farten noe mer enn sammenhengen  $v(\rho)$  skulle tilsi og dermed unngå at sterke gradienter i tettheten bygger seg opp. Whitham modellerer dette med å si at bilistene innstiller seg på en hastighet

$$v = v_k(\rho) - \kappa \frac{\partial \rho / \partial x}{\rho}, \quad (86)$$

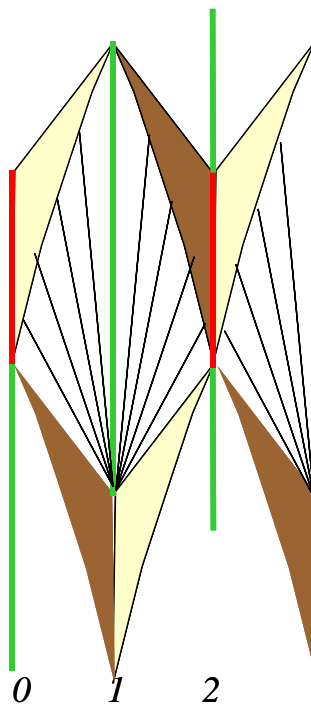
der  $v_k$  er hastigheten i følge enkel kinetisk teori. Dette synes å være en fornuftig modell siden  $v = v_k(\rho)$  hvis  $\rho$  er konstant, mens  $v$  er mindre enn  $v_k$  hvis  $\rho$  øker i kjøreretningen, og omvendt hvis  $\rho$  minsker. Det beste med modellen (og helt sikkert grunnen til at Whitham valgte formen i lign. (86)), er at den leder til en 2. ordens *parabolisk* ligning for  $\rho$ , siden  $J = \rho v = \rho v_k(\rho) - \kappa \rho_x$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \quad c(\rho) = \frac{d(\rho v_k)}{d\rho}. \quad (87)$$





**Figur 15:** Skisse av fullstendig løsning. Merk at vi får et stasjonært sjokk for  $x = 1/2$ .



**Figur 16:** Er dette en mulig løsning?

I den spesielle situasjonen der  $c(\rho) = 1 - 2\rho$  kan vi benytte  $c$  istedet for  $\rho$  som variabel. Dette leder til ligningen

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad (88)$$

som kalles *Burgers ligning*. Burgers ligning er en av de mest studerte ikke-lineære partielle diff.-ligningene og er mer inngående beskrevet i f.eks. Whitham, kapittel 4. Det finnes en overraskende sammenheng mellom Burgers ligning og den lineære diffusjonsligningen. Hvis  $\varphi(x, t)$  er en løsning av

$$\varphi_t = \varphi_{xx}, \quad (89)$$

vil funksjonen

$$c(x, t) = -2\kappa \frac{\varphi_x}{\varphi} \quad (90)$$

være en løsning av Burgers ligning. I Whitham er det vist hvordan dette kan brukes til å løse Cauchy-problemet for Burgers ligning. Transformasjonen kalles *Cole-Hopf-transformasjonen* etter to uavhengige arbeider av Cole og Hopf omkring 1951. Transformasjonen er imidlertid nevnt mye tidligere i et stort verk om differensialligninger av A. R. Forsyth.

Det viser seg at Burgers ligning har løsninger i form av "vandrende fronter"

$$\begin{aligned} c(x, t) &= C(x - x_0 - at) = C(s), \quad s = x - x_0 - at. \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} C(s) &= c_1, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} C(s) &= c_2 \end{aligned} \quad (91)$$

Fronten har altså en konstant verdi på kurvene  $x = x_1 + at$ , og veldefinerte grenser når  $x$  går mot  $\pm\infty$ . Vi finner en slik løsning ved å føre inn  $C$  i ligningen:

$$-aC' + CC' - \kappa C'' = 0. \quad (92)$$

Denne integrerer vi lett en gang til

$$(C - a)^2 = 2\kappa C' + A \quad (93)$$

der  $A$  er en integrasjonskonstant. Siden vi forventer at også den deriverte går mot 0 når  $x \rightarrow \pm\infty$ , ser vi at

$$\begin{aligned} a &= \frac{c_1 + c_2}{2}, \\ A &= \left( \frac{c_1 - c_2}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (94)$$

Vi setter dette inn og separerer ligningen:

$$-\frac{ds}{2\kappa} = \frac{dC}{\left(\frac{c_2 - c_1}{2}\right)^2 - (C - a)^2}. \quad (95)$$

Dette gir

$$-\frac{s - s_0}{2\kappa} = \frac{2}{c_2 - c_1} \operatorname{arctanh} \left( 2 \frac{C - a}{c_2 - c_1} \right), \quad (96)$$

som kan snus rundt:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{c_2 - c_1}{2} \tanh\left(\frac{c_2 - c_1}{4\kappa}(s - s_0)\right) \\ &= c_1 + (c_2 - c_1) \left[1 + \exp\left(\frac{c_2 - c_1}{2\kappa}(s - s_0)\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \quad (97)$$

Funksjonen blir en *sigmoide* (Jfr. logistisk vekst). Hvis  $c_2 < c_1$ , vil  $C(s)$  være en monotont avtakende front som beveger seg med hastighet

$$U = a = \frac{c_1 + c_2}{2} \quad (98)$$

fra venstre mot høyre. Merk at siden  $c = 1 - 2\rho$  i denne modellen, vil  $\rho(x, t)$  være en monotont *økende* front som beveger seg med samme hastighet, og der

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x, t) &= \rho_1 = \frac{1 - c_1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x, t) &= \rho_2 = \frac{1 - c_2}{2}, \\ U &= \frac{c_1 + c_2}{2} = 1 - (\rho_1 + \rho_2). \end{aligned} \quad (99)$$

Overgangen mellom  $\rho_1$  og  $\rho_2$  blir skarpere jo mindre  $\kappa$  er, og  $U$  er uavhengig av  $\kappa$ . Vi ser videre at  $U$  nettopp er sjokkhastigheten for ligningen

$$\rho_t + \rho\rho_x = 0 \quad (100)$$

når startbetingelsene er  $\rho(x, 0) = \rho_1$  for  $x < 0$  og  $\rho(x, 0) = \rho_2$  for  $x > 0$ , og  $\rho_1 < \rho_2$ . Grenseovergangen  $\kappa \rightarrow 0$  er derfor som vi forventer.

Whitham tar teorien enda et stykke videre ved å studere hva som skjer når bilene trenger en viss tid til å innstille seg på riktig hastighet. En bilfører har endelig reaksjonstid (og bilen kan akselerere og bremse med endelig størrelse). Hvis vi ser på hastigheten til en bestemt bil,  $v_B$ , i en situasjon der trafikk-tettheten endres, vil bilhastigheten kunne tenkes å følge ligningen

$$\frac{dv_B}{dt} = \frac{1}{\tau} (V - v_B), \quad (101)$$

der  $V$  er den ideelle hastigheten bilisten ønsker å følge, for eksempel gitt av ligning (86). Dette er en velkjent ligning fra kontrollteori. Hvis  $v_B = v_0$  ved tidspunktet  $t = 0$  og  $V$  er en gitt funksjon av  $t$  fra 0 til  $t$ , kan en uttrykke  $v_B$  som

$$v_B(t) = v_0 e^{-t/\tau} + \int_0^t \exp\left(\frac{t' - t}{\tau}\right) V(t') dt'. \quad (102)$$

Hvis spesielt  $V = V_0$  er konstant for  $t > 0$ , blir løsningen

$$v_B(t) = (v_0 - V_0)e^{-t/\tau} + V_0. \quad (103)$$

Virkingen av startverdien dør ut med *tidskonstant*  $\tau$ , og hvis  $V$  varierer langsomt (det vil si at tidsskalaen for variasjonene til  $V$  er lengre enn  $\tau$ ), vil  $v_B$  omlag følge  $V$ .

Vi ønsker å formulere ligning (101) for hastighetsfeltet  $v$  som funksjon av både  $t$  og  $x$ . Bilen følger en trasé  $x(t)$ , slik at  $v_B(t) = v(x(t), t)$ . Når en deriverer må en derfor bruke *konvektiv derivert*,

$$\begin{aligned}\frac{dv_B}{dt} &= \frac{d}{dt}v(x(t), t) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial t}\end{aligned}\tag{104}$$

Tilsammen gir dette to koblede ligninger for bevegelsen (utenom av- eller innpå-kjørsler)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau} \left( \left( v_k(\rho) - \kappa \frac{\partial \rho / \partial x}{\rho} \right) - v \right).\end{aligned}\tag{105}$$

Ligningene kalles et hyperbolsk system av diff.-ligninger, og vi skal ikke gå inn på løsning av det i full bredde, men ser umiddelbart at systemet har *likevektsløsninger*

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0, \\ v_0 &= v_k(\rho_0).\end{aligned}\tag{106}$$

På samme måten som for amøbene i [12], kan en undres over om en slik løsning er stabil overfor forstyrrelser. For å gjøre en lineær stabilitetsanalyse fører vi inn

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + r, \\ v &= v_0 + w.\end{aligned}\tag{107}$$

Etter noe regning kommer vi fram til følgende ligningssystem, der vi også har ført inn  $c_0 = \frac{d}{d\rho}(v_k \rho)|_{\rho=\rho_0} = v'_k(\rho_0)\rho_0 + v_0$ :

$$\begin{aligned}r_t + v_0 r_x + \rho_0 w_x &= 0, \\ w_t + v_0 w_x &= -\frac{1}{\tau} \left( w - \frac{c_0 - v_0}{\rho_0} r + \frac{\kappa}{\rho_0} r_x \right).\end{aligned}\tag{108}$$

Ligningene kan kombineres til en enkel lineær 2. ordens ligning som bare inneholder  $r$  :

$$r_t + c_0 r_x = \kappa r_{xx} - \tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 r.\tag{109}$$

Vi gjenkjenner kanskje første del av ligningen som en standard, lineær konveksjons/diffusjonsligning (se kap. 5.2), mens siste ledd kan skape problemer for oss hvis det "dominerer" over diffusjonsleddet. Standardmetoden for å studere lineære ligninger er å undersøke *fourierkomponenter*:

$$r(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)}.\tag{110}$$

Fourierkomponenten er en vandrende bølge med bølgetall  $k$  og frekvens  $\omega$ . Hvis dette føres inn i ligningen, får vi en såkalt *dispersjonsrelasjon* som knytter  $k$  og  $\omega$  sammen:

$$\tau(\omega - v_0 k)^2 + i(\omega - c_0 k) - \kappa k^2 = 0.\tag{111}$$

Siden bølgetallet  $k = 2\pi/\lambda$  der  $\lambda$  er bølgelengden, vil  $k$  være et reelt tall. Derimot kan frekvensen generelt være kompleks. Videre, siden

$$ae^{i(kx-\omega t)} = ae^{(\text{Im } \omega)t} e^{i(kx - (\text{Re } \omega)t)}, \quad (112)$$

ser vi at hvis imaginærdelen til  $\omega$  er større enn 0, vil amplituden på fourierkomponenten vokse eksponensielt i tid, mens den derimot avtar eksponensielt hvis  $\text{Im } \omega < 0$ . Det er mulig å vise at

$$\text{Im } \omega < 0 \text{ for alle } \omega \iff v_0 - \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} < c_0 < v_0 + \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}. \quad (113)$$

Dette forteller oss at  $v_0$  og  $c_0$  ikke kan være altfor ulike. For at alle fourierkomponenter skal dø ut, må

$$|v_0 - c_0| < \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}. \quad (114)$$

Hvis vi fører inn eksemplet over der  $v_k(\rho) = 1 - \rho$ , ser vi at  $v_0 = 1 - \rho_0$  og  $c_0 = 1 - 2\rho_0$  (i dimensjonsløse variable). Dermed vil kun området der

$$\rho < \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} \quad (115)$$

være stabilt overfor forstyrrelser. Dette resultatet, som ikke ser ut å være nevnt i Whitham, er interessant i lys av observasjoner som er rapportert. Trafikken ser ut til å følge et fundamental-diagram fra  $\rho = 0$  og oppover til en viss  $\rho_c$  som er betydelig mindre enn  $\rho_{\text{max}}$ . Deretter bryter det hele sammen, og  $J$  blir vesentlig mindre enn fundamentaldiagrammet skulle tilsi. Det kunne derfor være interessant å vite om dette skyldes ustabiliteter av den typen vi fant ovenfor, men problemet er å finne realistiske tallverdier å sette inn for  $\tau$  og  $\kappa$ .

### 3.3 Enkeltbilmodeller

Teorien i dette avsnittet er delvis hentet fra boka til Haberman, Sec. 64.

*Enkeltbilmodeller* dreier seg om å følge de enkelte bilene på veien. Med én kjørebane, og ingen mulighet for passering, kan vi anta at hver bil tilpasser hastigheten til bilen foran (forutsatt den er så nær at bilførereren kan se den). La oss betegne posisjonen til bil nr.  $n$  i køen med  $x_n$ . Den enkleste modellen vi kan tenke oss er

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\lambda \left( \frac{dx_n}{dt} - \frac{dx_{n-1}}{dt} \right). \quad (116)$$

Hvis bil nr.  $n$  har større fart enn bil nr.  $n - 1$ , vil følgelig bil nr.  $n$  bremse. Egentlig vil det være en viss forsinkelse i reaksjonen til bilførererne, så vi burde skrive

$$\frac{d^2x_n(t+T)}{dt^2} = -\lambda \left( \frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} \right), \quad (117)$$

der  $T$  er et uttrykk for førerens reaksjonstid. Ligningen kan integreres en gang til

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = -\lambda (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + d_n. \quad (118)$$

I en uniform situasjon der alle biler har samme fart og samme avstand, vil tettheten bli

$$\rho = \frac{1}{x_{n-1} - x_n}. \quad (119)$$

Bilhastigheten blir følgelig

$$v = \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\lambda}{-\rho} + d. \quad (120)$$

Konstanten  $d$  velges slik at  $v = 0$  for  $\rho = \rho_{\max}$ , og dette leder til følgende modell for  $v$  og dermed for fluksen  $J$ :

$$\begin{aligned} v &= \lambda \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}} \right), \\ J &= v\rho = \lambda\rho \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}} \right). \end{aligned} \quad (121)$$

Denne modellen kalles *California-modellen*. Den er ikke realistisk for små tettheter siden  $v \rightarrow \infty$  når  $\rho \rightarrow 0$ , men det er heller ikke å vente. Hvis det er svært få biler på veien, vil en jo ikke se bilen foran, og da er det naturlig at en kjører opp mot den maksimale hastigheten. En modifisert modell kunne være

$$v = \min \left( v_{\max}, \lambda \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}} \right) \right). \quad (122)$$

Det er ellers mulig å bygge inn bilistenes "følsomhet" for endringer ved å anta at  $\lambda$  varierer med avstanden til forankjørende bil. Her kunne vi for eksempel anta at

$$\lambda = \frac{a}{x_{n-1} - x_n},$$

slik at følsomheten forsvinner når avstanden blir stor. Da modifiseres ligningen (116) til

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\frac{a}{x_{n-1} - x_n} \left( \frac{dx_n}{dt} - \frac{dx_{n-1}}{dt} \right), \quad (123)$$

som fremdeles kan integreres analytisk en gang,

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = -a \ln |x_n(t) - x_{n-1}(t)| + d_n. \quad (124)$$

Samme utredning som ovenfor gir

$$v = a \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho}, \quad (125)$$

$$J = \rho a \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho}. \quad (126)$$

Dette gir fremdeles at  $v \rightarrow \infty$  når  $\rho \rightarrow 0$ , men her vil  $J \rightarrow 0$  både for  $\rho = 0$  og  $\rho = \rho_{\max}$ . Modellen kalles *Greenberg-modellen*, og passer i følge Whitham for trafikken i Lincoln-tunellen fra Manhattan til New Jersey når

$$\begin{aligned} a &= 17.2 \text{ mph}, \\ \rho_{\max} &= 228 \text{ biler/mile}. \end{aligned}$$

Modellen er fremdeles ikke helt tilfredsstillende, men samme idé kan jo forfølges videre ved for eksempel å anta at

$$\lambda = \frac{\tilde{a}}{(x_{n-1} - x_n)^2}. \quad (127)$$

Da ender vi opp med den lineære sammenhengen mellom  $v$  og  $\rho$ . Målinger av flux som funksjon av tetthet gir ellers alle en endelig stigning ut fra  $\rho = 0$ , i tråd med at  $v$  går mot en endelig verdi når  $\rho \rightarrow 0$ .

Fra et modelleringssynspunkt er det en interessant tanke å bruke en enkeltbilmodell til å utvikle en kontinuumsmodell. Det kunne for eksempel vært interessant å starte med trafikk på en flerfelts vei med stokastisk variasjon i kjøremønsteret og se hva en midlingsprosedyre ville gi (Se nedenfor om *synchronized flow*).

I køkjøring har vi alle erfart at det er ubehagelig å kjøre bak bilister som holder ujevn hastighet, og dette kan en også studere med enkeltbil-modellene. Med endelig reaksjonstid blir ligningene imidlertid ikke rene differensialligninger, men såkalte forsinkelsesligninger, *delay equations* på engelsk. Betrakt to biler og anta at bil nr. 1 lar hastigheten  $v_1$  variere periodisk. Også her kan vi regne med komplekse løsninger,

$$v_1(t) = 1 + ae^{i\omega t}. \quad (128)$$

Anta at vi har kommet inn i en stasjonær situasjon der også bil nr. 2 følger en tilsvarende variasjon (men ikke nødvendigvis i fase med den første),

$$v_2(t) = 1 + be^{i\omega t}. \quad (129)$$

Vi setter dette inn i ligning (117) og får

$$bi\omega e^{i\omega T} = -\lambda(b - a), \quad (130)$$

eller

$$b = \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\lambda} e^{i\omega T}} a. \quad (131)$$

Dermed blir

$$\frac{|b|}{|a|} = \left| \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\lambda} e^{i\omega T}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{\omega}{\lambda} \sin \omega T + \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2\right)}}. \quad (132)$$

Amplituden til  $b$  vil være større enn amplituden til  $a$  hvis nevneren er mindre enn 1. Dette inntreffer hvis

$$\sin(\omega T) > \frac{\omega}{2\lambda}, \quad (133)$$

som alternativt kan uttrykkes som

$$\frac{\sin \omega T}{\omega T} > \frac{1}{2\lambda T}. \quad (134)$$

Siden  $\sin x/x \leq 1$ , er det ingen fare så lenge  $\lambda T < 1/2$ , men hvis dette ikke er tilfelle, vil det finnes skumle frekvenser, helst lave, pussig nok. Som vi forstår, vil dette kunne forsterke seg geometrisk etterhvert som vi går bakover i køen. Gode bilførere vil merke det og forsøke å dempe svingningene i hastigheten. En tilsvarende analyse kunne sikkert foretas av brå nedbremsinger.

### 3.4 Problemstillinger i tilknytning til veitrafikk

For modelleringsseminaret ble det foreslått en del problemstillinger som det kunne være interessant å undersøke nærmere. Noen ble tatt opp på seminaret, men det kunne være interessant å studere dette videre i for eksempel prosjekter eller diplomer, og samarbeid med Inst. for samferdselsteknikk kan da være aktuelt. Det ville spesielt være interessant å koble teorien ovenfor med stokastiske modeller.

### 3.4.1 1001-1002-1003-regelen

Tre-sekundersregelen til foranliggende kjøretøy er anbefalt for kjøring i tilfelle brå oppbremsinger. Hvis vanlig trafikk skulle benytte denne regelen, ville maksimum fluks (på enfelts vei) ligge på 1200 kjøretøyer pr. time. I praksis observeres typisk ca. 2200 kjøretøyer pr. time. Dette tilsvarer bare omlag 1.6s mellom hvert kjøretøy. Hva som oppfattes som sikker avstand til forankjørende bil er individuelt, men en kan undres på om tre-sekunders regelen er avlegs, og om en i stedet bør få bilistene til å bruke en *2-sekunders* regel.

### 3.4.2 Fotgjengerovergang på en rett veistrekning

Vi har alle erfart, enten som fotgjenger eller som syklist, å trykke på ”grønn mann” og vente. Etter en stund orker vi ikke vente lenger og tar oss over på rødt så snart vi ser muligheten til det. Deretter skifter lyset til grønt.

I England har de lagt seg på en annen strategi: Signalet skifter raskt til grønt, og en er i stand til å krysse veien med vanlig fart. Når en da har kommet over, skifter lyset til en blinkende grønn mann for fotgjengeren og blinkende gult for bilene. Bilene kan passere på blinkende gult så lenge det ikke er fotgjengere på vei over gangfeltet. Er dette en bedre strategi? Vi unngår i alle fall at fotgjengere og bilister krysser mot rødt lys, men samtidig kan det muligens stykke opp trafikken for mye.

### 3.4.3 Endringer i trafikkforholdene

Selv om kinematisk teori er svært enkel og ufullstendig, bør den kunne gi økt innsikt i hva som skjer ved typiske endringer i trafikkforholdene, for eksempel:

- Innsnevring/utvidelse av kjørebanelen
- Glatt kjørebane
- Plutselig regn/snøbyger
- Av- og innpå-kjørsler
- Ulykker: Veien helt stengt, eventuelt en av to kjørebaneler er stengt
- Motbakker
- Trailere i veien

Forholdene kan studeres med små og store trafikk tettheter, og det kan skje en rekke uventede ting som det kanskje er mulig å relatere til egne erfaringer i trafikken.

### 3.4.4 Grønn bølge

Grønne bølger sies å kunne avvikle trafikken mer effektivt enn tilfeldig styrte trafikk-lys, for eksempel i Holtermannsveien. Er dette bare en myte, eller kan en styre trafikklys på en optimal måte, når en forutsetter at sideveiene må få grønt sin angitte del av tiden?



Denne problemstillingen er en del av teorien for *styring av lyskryss*. Hvordan bør lyskryss egentlig styres? For eksempel er det sikkert uheldig at køen på rødt bygger seg opp lengre enn ett kvartal og på denne måten influerer på lyskrysset lenger bak.

### 3.4.5 T-kryss

Et T-kryss der en sidevei kommer normalt inn på en forkjørsvai er ofte problematisk. Bilførerne har ulik oppfatning av hvor stor sikkerhetsmargin de trenger, og her kunne en analysere ulike forutsetninger og foreta simuleringer. Prof. Stein Johannessen kaller dette for ”gap acceptance” og forteller at det finnes data over hvordan dette fordeler seg på trafikantene.

Hvor stor skal trafikken for eksempel være før en vurderer å bygge planfritt kryss?

### 3.4.6 Synchronized flow

Gjennom omfattende målinger på tyske motorveier har seniorforsker Boris S. Kerner ved DaimlerChrysler kommet opp med noe som han kaller *synchronized flow*. Ved lav tetthet flyter trafikken tilnærmet fritt, og fluksen ser ut til å følge et konvensjonelt fundamentaldiagram. Middelhastighetene i hver kjørebane er noe forskjellige, og bilene kan kjøre forbi ved å legge seg over i feltet til venstre. Når tettheten øker over et visst nivå, bryter imidlertid dette trafikkbildet sammen. Trafikken ”synkroniseres” i alle kjørebane, og det er ikke lenger mulig å skifte felt. Kerner sammenligner tilstanden med kondensering i en gass, og betegner overgangen fra fri til synkron trafikk som en *faseovergang*. Fra den synkron tilstanden skal det nå lite forstyrrelser til før vi får en virkelig trafikk-kork, en *jam*, der bilene står støtfanger til støtfanger og nesten ikke kommer av flekken. Begrepet er nok relativt nytt, og ser ikke ut til å være fullstendig forstått, men sammenbruddet i fundamentaldiagrammet ser det ut til at flere har observert. En populær beskrivelse som i hovedsak viser målinger, finnes i Kerner (1999). Det er gjort forsøk på å forklare synchronized flow ved hjelp av statistisk fysikk (Mahnke & Kaupuzs, 1999).

Egentlig er dette koblet sammen med modellering av kjøring på flerfelts vei. Her kunne en starte med en modell for enkelt-biler og deretter prøve å overføre egenskapene til en kontinuumsmodell. Oppgaven er antagelig utfordrende, og det ser ikke ut til å være mye tilgjengelig informasjon om synchronized flow.

## 4 BEVARELSSESLOVENE I KONTINUUMSMEKANIKK

Det har vist seg at kontinuumsmekanikk kan beskrives på en kompakt måte ved å bruke rammeverket vi har gått gjennom ovenfor, og dette gjenspeiler seg i alle nyere lærebøker i kontinuum- og fluidmekanikk, for eksempel [16].

De fysiske lovene bak kontinuumsmekanikk er i utgangspunktet lover for en gitt samling materie. For eksempel er Newtons lov i utgangspunktet en lov for ett eller flere massepunkter. På samme måte består et termodynamisk system slik vi bruker det når vi formulerer første hovedsetning, av en fast samling molekyler. I kontinuumsmekanikken der materialet gjerne ”strømmer forbi”, er vi derimot interessert i å formulere lovene for et fast utsnitt av rommet. Dette utsnittet vil følgelig inneholde forskjellige massepartikler til forskjellig tid. Et slikt utsnitt kalles et *kontrollvolum* (Det er fundamentale spørsmål knyttet til begrepet ”massepartikkel” som vi ikke skal komme inn på her).

Et kontinuerlig medium i bevegelse kan beskrives *Eulersk* ved at at en i hvert punkt angir hastigheten  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  til mediet, eller vi kan bruke en *Lagrangesk* beskrivelse der vi følger massepartiklene etterhvert som tiden går,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{x}(0, \mathbf{a})$ .

En *materialregion*  $R(t)$  er et utsnitt av mediet som til enhver tid inneholder de samme massepartiklene. Matematisk er  $R(t)$  definert som  $R(t) = \{\mathbf{x}(t, \mathbf{a}); \mathbf{a} \in R(0)\}$ , og typisk vil en materialregion endre form og posisjon etterhvert som tiden går.

I dette avsnittet skal vi kort gå gjennom hvordan de viktigste bevarelseslovene i fluidmekanikk framkommer. Reynolds transportteorem er en nytting setning fra vektoranalysen.

## 4.1 Reynolds transportteorem

Fra vektoranalysen kjenner vi blant annet *Divergensteoremet* og *Stokes sats*. *Reynolds transportteorem* er en annen setning i samme familie som vi først introduserer for en-dimensjonale integraler.

Hvis vi skal derivere

$$H(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx, \quad (135)$$

kan vi skrive  $H(t) = F(b(t), t) - F(a(t), t)$  der  $F$  betegner den anti-deriverte av  $f$  med hensyn på første argument og benytte vi kjerneregelen. Dette gir oss

$$\frac{dH}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \int_{a(0)}^{b(0)} f(x, t) dx|_{t=0} + f(b(0), 0) \frac{\partial b}{\partial t}(0) - f(a(0), 0) \frac{\partial a}{\partial t}(0). \quad (136)$$

Setningen er grei å kjenne til, og vi ser at i tillegg til det første leddet, også får bidrag på grunn av at integrasjonsintervallet endrer seg med tiden.

Reynolds transportteorem er denne setningen når vi integrerer over et bevegelig romlig område. Vi skal anta at området vi ser på,  $R(t)$ , omsluttet av en bevegelig rand,  $\partial R(t)$ . Videre tenker vi oss at punktene på randa er merket slik at vi kan følge dem etterhvert som tiden går. Spesielt vil alle punktene på randa til ethvert tidspunkt ha en hastighet  $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$  der  $\mathbf{x}(t) \in \partial R(t)$ .

Vi kan da formulere Reynolds transportteorem for integralet av en funksjon  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  over området  $R(t)$  på følgende måte:

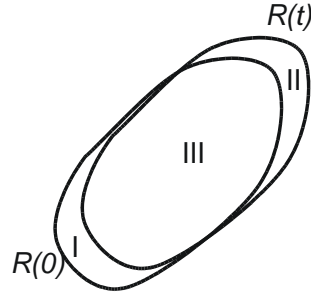
$$\left( \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dV \right)_{t=0} = \left( \frac{d}{dt} \int_{R(0)} \varphi(\mathbf{x}, t) dV \right)_{t=0} + \int_{\partial R(0)} \varphi(\mathbf{x}, 0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (137)$$

Teoremet krever at  $\mathbf{v}$  og  $\varphi$  er tilstrekkelig pene funksjoner og at  $R(t)$  er rimelig pene mengder, men dette skal vi ikke gå nærmere inn på her. Beviset følger direkte fra definisjonen på den deriverte. Vi tenker oss  $R(0)$  og  $R(t)$  som skissert på figur 17.

La  $\Phi_i(t_0)$  betegne integralet av  $\varphi$  over område "i" i tidspunktet  $t_0$ , for eksempel

$$\Phi_{III}(t_0) = \int_{\mathbf{III}} \varphi(\mathbf{x}, t_0) dV. \quad (138)$$

Generelt er områdene **I** og **II** definert med utgangspunkt i delene av  $\partial R(0)$  der hastighetsfeltet



**Figur 17:** Definisjon av områdene I, II og III.

peker henholdsvis inn i og ut av  $R(0)$ . I følge definisjonen av den deriverte og figur 17 har vi

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dV \right)_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\text{III}}(t) + \Phi_{\text{II}}(t) - (\Phi_{\text{I}}(0) + \Phi_{\text{III}}(0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\text{I} \cup \text{III}}(t) - \Phi_{\text{I} \cup \text{III}}(0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\text{II}}(t)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\text{I}}(t)}{t}. \end{aligned} \quad (139)$$

Den første grenseverdien er nettopp

$$\left( \frac{d}{dt} \int_{R(0)} \varphi(\mathbf{x}, t) dV \right)_{t=0}. \quad (140)$$

For små  $t$  blir områdene **I** og **II** tynne slik at vi kan bruke volumelementene  $dV = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt d\sigma$  for område **II**, og  $dV = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt d\sigma$  for område **I**. I grensen  $t \rightarrow 0$  får vi nettopp

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\text{II}}(t) - \Phi_{\text{I}}(t)}{t} = \int_{\partial R(0)} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \Big|_{t=0}. \quad (141)$$

I de fleste lærebøkene vil vi finne at en uten videre nå har satt

$$\frac{d}{dt} \int_{R(0)} \varphi(\mathbf{x}, t) dV = \int_{R(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (142)$$

Dette er uheldig for våre anvendelser og direkte feil hvis  $\varphi$  har diskontinuiteter inne i området vi integrerer over (jfr. eksemplet i avsnitt 2.5).

## 4.2 Massebevarelse

Massebevarelse er et sentralt prinsipp i kontinuumsmekanikk. Her er  $\varphi = \rho$ , det vil si massetettheten. Hvis vi ser bort fra kilder og sluk, vil massen innenfor en materialregion  $R(t)$  være konstant, siden dette nettopp er definisjonen på en materialregion. Dermed vil

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0, \quad (143)$$

og følgelig får vi ved hjelp av transportteoremet,

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{R(0)} \rho(\mathbf{x}, t) dV \right|_{t=0} + \int_{\partial R(0)} \rho(\mathbf{x}, 0) \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, 0) d\sigma = 0. \quad (144)$$

Siden det ikke er noe spesielt med tidspunktet  $t = 0$ , kan vi for ethvert tidspunkt og et vilkårlig fast kontrollvolum  $R$  skrive

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dV + \int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (145)$$

Dette er massebevarelsesloven på integralform når vi ikke har kilder eller sluk innenfor kontrollvolumet. Eventuelle kilder vil komme inn på formen

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dV + \int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_R q dV, \quad (146)$$

og nedenfor tar vi ikke med det i diskusjonen. Dette kunne vi naturligvis også satt opp umiddelbart fra teorien i avsnitt 2.4, siden masse er en materialvariabel og fluksen følgelig har formen  $\rho \mathbf{v}$ .

Som diskutert i avsnitt 2.4 kan vi, når  $\rho$  og  $\mathbf{v}$  er tilstrekkelig glatte, derivere under integraltegnet og anvende divergensteoremet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_R \rho dV &= \int_R \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \\ \int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_R \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \end{aligned} \quad (147)$$

slik at

$$\int_R \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (148)$$

Dette leder da til differensialformuleringen

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (149)$$

Strømningen kalles stasjonær hvis  $\rho$  og  $\mathbf{v}$  er uavhengige av tiden. Da vil  $\int_R \rho dV$  være konstant og massebevarelsen reduserer seg til

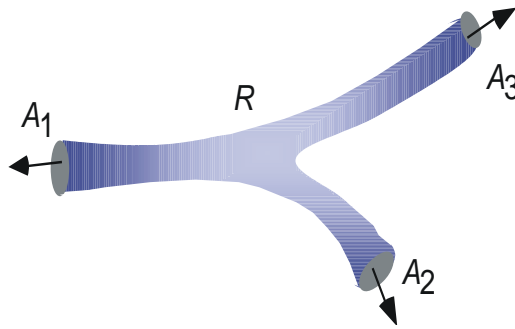
$$\int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (150)$$

Ligning (150) kan brukes direkte til beregninger, som illustrert for rørsystemet på figur 18. Ved å la  $R$  være som angitt på figuren, blir bevarelsesloven når strømningen er stasjonær

$$\int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{A_3} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (151)$$

Ved å anta at  $\rho$  er konstant over rørtverrsnittene og definere *gjennomsnittshastigheten* som

$$v_i = \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (152)$$



**Figur 18:** Stasjonær strømning i et nettverk av rør vil oppfylle massebevarelsen.

får vi sammenhengen

$$A_1 \rho_1 v_1 + A_2 \rho_2 v_2 + A_3 \rho_3 v_3 = 0. \quad (153)$$

Som en forstår, er det enkelt å generalisere dette til vilkårlige nettverk og ellers inkludere kilder og sluk.

Vi utleder umiddelbart følgende spesialtilfeller av differensialformuleringen:

- Stasjonær strømning (ingen tidsvariasjon):  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ ,
- Konstant tetthet (inkompressibel strømning):  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

### 4.3 Impulsbevarelse

Ved siden av massebevarelsen er bevarelse av *impuls* eller *bevegelsesmengde* (*momentum* på engelsk) den mest sentrale bevarelsesloven i mekanikk.

Impuls pr. volumenhet er definert ved  $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}$ . Her er altså tettheten en vektor som i rommet er *tre-dimensjonal*. Oftest tenker en på dette som de *tre* bevarelseslovene for impuls i henholdsvis *x*-, *y*- og *z*-retning.

Siden en materialregion alltid inneholder de samme massepartiklene, vil Newtons lov anvendt på en materialregion  $R(t)$  nettopp bli

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho \mathbf{v} dV = \Sigma \mathbf{F}(t). \quad (154)$$

Ved å anvende Reynolds transportteorem får vi så

$$\left( \frac{d}{dt} \int_{R(0)} \rho \mathbf{v} dV + \int_{\partial R(0)} (\rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \right)_{t=0} = \Sigma \mathbf{F}(t=0). \quad (155)$$

Hvis  $R$  er et fast kontrollvolum, får vi dermed

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho \mathbf{v} dV + \int_{\partial R} (\rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \Sigma \mathbf{F} \quad (156)$$

Ligningen kan brukes til å finne bevarelse av impuls-komponenten i en vilkårlig retning: Hvis  $\mathbf{a}$  er en enhetsvektor, vil vi ved å ta skalarproduktet med  $\mathbf{a}$  få

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho v_a dV + \int_{\partial R} (\rho v_a) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \Sigma F_a, \quad (157)$$

der  $v_a = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$  og  $F_a = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}$ . Som nevnt ovenfor, kan  $\mathbf{a}$  være enhetsvektorene i et eller annet koordinatsystem, og dette gir oss tre ligninger hvis vi regner i rommet.

For å komme videre, er det nødvendig å si noe om kreftene som virker på massen i  $R$ . En skiller mellom *massekrefter* (engelsk *body forces*) og *overflatekrefter* (engelsk *surface forces*). Generelt kan en skrive

$$\mathbf{F}_B = \int_R \mathbf{f}_B(\mathbf{x}, t) dV, \quad (158)$$

for massekrefter og

$$\mathbf{F}_S = \int_{\partial R} \mathbf{f}_S(\sigma, t) d\sigma, \quad (159)$$

for overflatekreftene.

Den vanligste massekraften er tyngdekraften,

$$\mathbf{F}_g = \int_R \rho \mathbf{g} dV. \quad (160)$$

I geofysisk strømming (for eksempel hav og atmosfære) er også *Corioliskraften* og *sentripetalakselerasjonen* viktig. Dette er krefter som oppstår på grunn av at vårt kontrollvolum befinner seg et fast sted på jordoverflata og dermed følger med i jordrotasjonen. Corioliskraften er gitt av

$$\mathbf{F}_c = \int_R \rho (-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) dV \quad (161)$$

der  $\boldsymbol{\Omega}$  er vinkelhastighetsvektoren til jorda ( $2\pi/24\text{timer} = 7.3 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$ ). Sentripetalkraften er gitt ved

$$\mathbf{F}_s = \int_R \rho (-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) dV \quad (162)$$

der  $\mathbf{r}$  er posisjonsvektoren regnet fra jordas sentrum. Sentripetalkraften regnes oftest inn som en modifikasjon av  $\mathbf{g}$ -vektoren som likevel bestemmer vertikalen. I *plasma* vil en ha kompliserte elektro-magnetiske krefter som vi ikke skal gå nærmere inn på her.

Kreftene som virker på overflaten av  $R$  kan uttrykkes ved hjelp av den såkalte *spenningstensen* for mediet. Spenning er i utgangspunktet kraft pr. flateenhet. Kraften kan virke langs en flate (*skjærspenning*) eller ortogonalt på flaten (*hovedspenning*). Vi viser til mekanikk-kursene for en nærmere diskusjon av spenningstensen. Hvis vi utstyrr rommet med et kartesisk koordinatsystem, kan vi representere spenningstensen ved hjelp av en *symmetrisk*  $3 \times 3$  *matrise*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}. \quad (163)$$

For et generelt flatelement  $d\sigma$  med normalvektor  $\mathbf{n}$  er kraften som virker på  $d\sigma$  gitt av

$$d\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}d\sigma = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} d\sigma. \quad (164)$$

Dermed kan vi tilsammen sette opp impulsbevarelsesloven på integralform:

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho \mathbf{v} dV + \int_{\partial R} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_R \rho \mathbf{f}_B dV + \int_{\partial R} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (165)$$

Igjen minner vi om at dette er en vektorligning som i rommet er ekvivalent med tre skalare ligninger. Ved å betegne de tre radene i  $\mathbf{T}$  med  $\mathbf{t}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (slik at vi i siste integral har skalarproduktene  $\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), ser vi ved igjen å flytte derivasjonen innenfor integraltegnet og anvende divergensteoremet at ligningene på differensialform blir

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \nabla \cdot ((\rho v_i) \mathbf{v}) = \rho f_i + \nabla \cdot \mathbf{t}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (166)$$

Hvis vi arbeider med væsker, vil spenningstensoren ha bidrag fra trykk og viskositet. Trykket  $p$  virker normalt på flatelementene og har samme verdi i et punkt uansett hvordan flatelementet er orientert. I tillegg er alle vanlige væsker mer eller mindre *viskøse*. Viskositet kan oppfattes som en type indre friksjon som gir motstand mot deformasjoner i væsken. Det enkleste er *Newtonske væsker* hvor skjærspenningen for en strømning med hastighet  $u(y)$  parallelt  $x$ -aksen er gitt av

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (167)$$

der  $\mu$  kalles *dynamisk viskositet*. Det kan vises (Se f.eks. klassikeren [11]) fra de matematiske egenskapene til spenningstensoren at det enkleste uttrykket som er forenlig med ligning (167), og som gir oss det statiske trykket når væsken er i ro, i kartesiske koordinater har formen

$$t_{ij} = \left( -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (168)$$

Ved å ta divergensen av dette uttrykket, får vi for ligning "i",

$$\nabla \cdot \mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{v}}{\partial x_i} + \mu \left( \nabla^2 v_i + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{v}}{\partial x_i} \right) \quad (169)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \nabla^2 v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{v}}{\partial x_i} \right). \quad (170)$$

På kompakt form kan vi skrive

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot ((\rho \mathbf{v}) \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f}_B - \nabla p + \mu \left( \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right), \quad (171)$$

som kalles *Navier-Stokes ligninger*. Hvis væsken i tillegg er inkompressibel og tettheten er konstant, reduseres ligningene til

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \cdot ((\mathbf{v}) \mathbf{v}) = \mathbf{f}_B - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (172)$$

siden  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  i dette tilfellet er null (fra massebevarelsen).

## 4.4 Energibevarelse

Termodynamikkens første hovedsetning sier at for et system i termodynamisk likevekt vil tilført varme bli brukt til å utføre arbeid og endre systemets energi

$$dQ = dW + dE. \quad (173)$$

Vi skal ikke gå nærmere inn på forutsetningene for at en materialregion  $R(t)$  skal kunne oppfattes som sammensatt av systemer i termodynamisk likevekt. Energien vil vi uttrykke ved hjelp av *spesifikk energi*  $e$  (energi pr. masseenhet) slik at

$$E(t) = \int_{R(t)} e\rho dV. \quad (174)$$

Det viser seg at  $e$  er en materialvariabel. Det er verken  $Q$  eller  $W$ . Spesifikk energi kan for eksempel bestå av *kinetisk* og *indre* energi pr. masseenhet:

$$e = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2 + u. \quad (175)$$

Arbeid som systemet utfører vil være av forskjellig art. Hvis vi regner arbeid pr. tidsenhet (effekt), får vi:

(i) *Arbeid mot massekreftene:*

$$\frac{dW_B}{dt} = - \int_R \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{v} dV \quad (176)$$

(ii) *Arbeid mot overflatekreftene:*

$$\frac{dW_S}{dt} = - \int_{\partial R} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma \quad (177)$$

(iii) *Annet arbeid som systemet utfører* (f.eks. driver en turbin). Dette betegner vi for enkelthets skyld

$$\frac{dW_t}{dt}. \quad (178)$$

Dette gir oss fra første hovedsetning, samt ved å anvende Reynolds transportteorem på tettheten  $e\rho$ , den generelle energibevarelsesloven:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_t}{dt} + \int_R \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial R} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma = \frac{d}{dt} \int_R e\rho dV + \int_{\partial R} e\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (179)$$

For *konservative* massekrefter vil arbeid mot massekreftene tilsvare endring i systemets potensielle energi og for tyngdekraften får vi spesielt

$$\frac{dW_b}{dt} - \frac{dE_p}{dt} = 0, \quad (180)$$

der  $E_p$  er definert

$$E_p(t) = \int_{R(t)} \rho(\mathbf{x}, t) g z dV \quad (181)$$



Siden vi også her kan sette

$$\frac{dE_p}{dt}(0) = \left( \frac{d}{dt} \int_{R(0)} \rho g z dV + \int_{\partial R(0)} \rho g z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \right)_{t=0}, \quad (182)$$

kan en naturligvis innbefatte  $gz$  i  $e$  og fjerne  $dW_b/dt$  fra venstre side i ligningen. Vi overlater til leseren å vise at ligningen forblir uforandret om nullpunktet til  $z$  endres ( $z$  erstattes med  $z + z_0$ ).

På samme måte som for massebevarelsen kan vi også her utlede differensialformuleringen ved hjelp av divergensteoremet, forutsatt at betingelsene er til stede.

For mer kompliserte medier og blandinger må en stille opp bevarelseslover for konsentrasjonen på de enkelte delsubstansene. Hvis det foregår kjemiske reaksjoner der det forbrukes og dannes materiale, må også dette legges inn i bevarelseslovene. I tillegg til bevarelseslovene er termodynamikken viktig. I denne forbindelse antar vi at kontinuumet er bygd opp av "partikler" der det hersker termodynamisk likevekt. Vi kan da operere med tilstandsligninger, for eksempel  $\rho = p/RT$ . På tilsvarende måte vil også den indre energien  $u$  være en funksjon av  $p$  og  $T$ .

## 4.5 Kommentarer og eksempler

Det fins flere bevarelseslover i kontinuumsmekanikk enn dem som vi har sett på her. Spesielt er bevarelsesloven for *virvling* ( $\nabla \times \mathbf{v}$ ) viktig i mange anvendelser.

Tradisjonell mekanikk- og matematikkundervisning er orientert mot differensialligninger, det vil si differensialformuleringer. Dette er naturlig siden det finnes et enormt materiale om eksistens av løsninger, og teknikker som for eksempel rekkeutviklinger, integraltransformer og perturbasjonsmetoder til å finne løsninger.

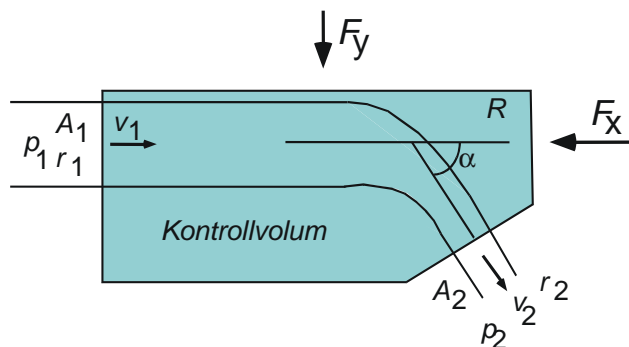
Likevel vil en se at moderne lærebøker i praktisk orientert mekanikk i større grad argumenterer ut fra integralformuleringene. Dette har flere årsaker. Integralformuleringene er uavhengige av valg av koordinatsystem og uttrykker de fundamentale fysiske lovene (som tross alt styrer den virkelige verden) mer åpenbart enn differensialformuleringene. Og integralformuleringene kan brukes direkte i praktiske oppgaver. Et kontrollvolum behøver slett ikke være "en liten boks"!

Bevarelseslovene gjelder også for situasjoner der differensialligningene kommer til kort, for eksempel for diskontinuerlige variable. Dette er spesielt viktig når en skal behandle sjokkbølger.

Mens numeriske modeller tradisjonelt blir laget ut fra differensialligninger ved at en erstatter de deriverte med endelige differenser, kan en også her benytte integralformuleringer ved å dele området opp i en stabel av bokser. Ligningene for hver boks settes opp med utgangspunkt i bevarelseslovene. Dermed er en garantert at de numeriske løsningene er forenlig med bevarelseslovene. Endelig-elementformuleringer og såkalte svake løsninger av differensialligninger har også tilknytning til bevarelseslovene på integralform.

Nedenfor skal vi ta for oss to eksempler på hvordan en kan regne med bevarelseslovene. Det første skulle være velkjent for alle med litt bakgrunn i fluidmekanikk.

Det andre eksemplet tar for seg fenomenet med sjokk, og er typisk for denne typen problemer. Bevarelseslovene gir oss såkalte sjokk-betingelser som hjelper oss til å finne egenskapene hos sjokket. I aerodynamikk er sjokk knyttet til overlydshastigheter, mens det hydrodynamiske sjokket i eksemplet opptrer ved svært så dagligdagse hastigheter.



**Figur 19:** Hvor store krefter må vi anvende for å holde et rørbend i ro?

#### 4.5.1 Krefter på rørbend.

Vi betrakter et rørbend med stasjonær horisontal strømming. Vi kjenner trykk, tverrsnittsareal, tetthet og hastigheter ved inn- og utløpet. Problemet består i å finne kreftene  $F_x$  og  $F_y$  som vi må anvende for å holde rørbendet i ro. Hastighetene er definert med retningen som angitt med piler, og vi antar at alle variable er konstante over tverrsnittet. På grunn av stasjonaritet blir massebevarelsen som ovenfor

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2. \quad (183)$$

For impulsbevarelsen må vi først skaffe oss oversikt over kreftene på  $R$ , som i tillegg til kreftene som trengs for å holde bendet i ro, utgjøres av trykk-kreftene:

$$\begin{aligned} (\Sigma F)_x &= p_1 A_1 - F_x - p_2 A_2 \cos \alpha, \\ (\Sigma F)_y &= -F_y + p_2 A_2 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (184)$$

På grunn av stasjonariteten må

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho \mathbf{v} dV = 0, \quad (185)$$

mens

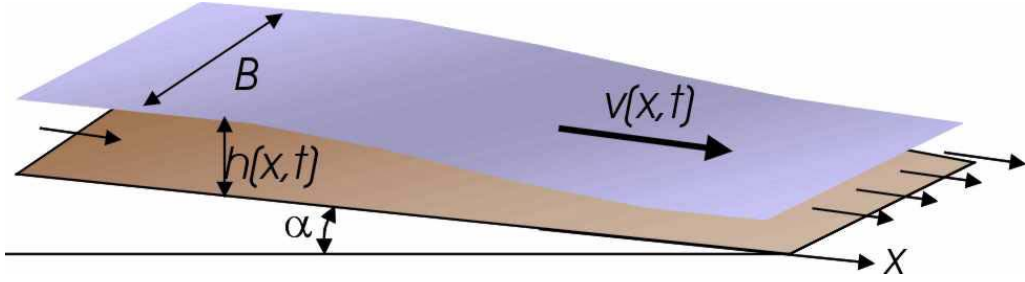
$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \rho v_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \rho_1 v_1 (-v_1 A_1) + \rho_2 v_2 \cos \alpha (v_2 A_2), \\ \int_{\partial R} \rho v_y \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \rho_1 \cdot 0 \cdot (-v_1 A_1) + \rho_2 (-v_2 \sin \alpha) (v_2 A_2). \end{aligned} \quad (186)$$

Hvis dette føres inn i bevarelsesloven, får vi

$$\begin{aligned} F_x &= p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \alpha + \rho_1 v_1^2 A_1 - \rho_2 v_2^2 A_2 \cos \alpha, \\ F_y &= p_2 A_2 \sin \alpha + \rho_2 v_2^2 A_2 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (187)$$

eller, med  $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = M$ ,

$$\begin{aligned} F_x &= M(v_1 - v_2 \cos a) + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \alpha, \\ F_y &= M v_2 \sin \alpha + p_2 A_2 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (188)$$



Figur 20: Idealisert bilde av ei elv.

#### 4.5.2 Flodbølger i elver

Vi skal nedenfor se litt på den aller enkleste teorien for flodbølger eller vannsprang i elver. Bak vannspranget er vann-nivået høyere enn foran, og folk og fe langs elva kan bli revet med av vannmassene, eller plutselig befinne seg i mye dypere vann enn de setter pris på. Grunnen til at spranget dannes, er at vanntilførselen oppe i elva øker for raskt, f.eks. gjennom utslipp fra en kraftstasjon eller ved et dambrudd.

For å analysere hva som skjer vil vi betrakte vann som strømmer nedover et skråplan med relativt liten heldningsvinkel  $\alpha$ . Bredden av strømmen på tvers av skråplanet er  $B$ .

La oss anta at hastigheten på vannet er rettet ned langs skråplanet og har verdien  $v$ , som er en funksjon av posisjonen  $x$  og tiden  $t$ , og uavhengig av  $z$  og  $y$ ,  $v(x, t)$ . Dette forutsetter at strømmingen er turbulent og at vanddypet ikke er for stort. Da er hastigheten omlag konstant over dypet, men helt ved bunnen har vi et grensesjikt der forutsetningen ikke nødvendigvis er så bra. Videre antar vi at overflaten er gitt av  $z = h(x, t)$ .

For å modellere strømmingen skal vi benytte masse- og impuls-bevarelse. Situasjonen er illustrert på fig. 20.

La oss først se hva massebevarelsen gir. I utgangspunktet har bevarelsesloven den generelle formen

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dV + \int_{\partial R} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (189a)$$

Her kan en naturligvis anta at tettheten  $\rho$  er konstant og bruke  $dV = Bh(x, t)dx$ , mens mengden  $j$  som strømmer forbi et punkt  $x$  pr. tidsenhet har formen

$$j(x, t) = \rho v(x, t) \cdot (Bh(x, t)). \quad (190)$$

Fluksvektoren (mengde pr. flate- og tidsenhet) blir følgelig som forventet

$$\mathbf{j}(x, t) = \rho v(x, t) \hat{i}. \quad (191)$$

Dette kan vi så føre inn i lign. 189a for et utsnitt av elva mellom  $x = a$  og  $x = b$ , og benytte at  $\mathbf{n} = -\hat{i}$  i  $x = a$ , og  $\hat{i}$  i  $x = b$ :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho Bh(x, t) dx + [(\rho v) (Bh)]_a^b = \quad (192)$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho Bh(x, t) dx + [\rho v(b, t) \cdot Bh(b, t) - \rho v(a, t) \cdot Bh(a, t)] = 0. \quad (193)$$

Legg merke til at fluksen er null på grenseflatene mot bunnen og overflaten, og i  $y$ -retning antar vi jo at det ikke er noen strøm. Ved å la  $a \rightarrow b$ , dividere med  $b - a$  på vanlig måte, og flytte derivasjon innenfor integraltegnet, får vi ligningen på differensialform:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0. \quad (194)$$

Siden er det to ukjente funksjoner,  $v$  og  $h$  som inngår, kan vi ikke løse ligningen slik den står.

Impulsbevarelsen vil her bare gi oss noe for impulsen i  $x$ -retningen,  $p_x = \rho v$ , og bevarelsesloven får følgende form:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b (\rho v) B h dx + [(\rho v) v \cdot (Bh)]_a^b = \sum F_x. \quad (195)$$

Det gjenstår å spesifisere kreftene. Tyngdekraften virker direkte på vannet, og langs  $x$ -aksen utgjør denne kraftkomponenten

$$F_g = \int_a^b \rho g \sin \alpha B h(x, t) dx. \quad (196)$$

Deretter har vi trykk-kreftene. Vi ser bort fra trykket på overflaten, og på bunnen er trykkkomponenten langs  $x$ -aksen null. Derimot vil vi ha et bidrag fra endeflatene. Her regner vi hydrostatisk trykk,  $p = \rho g(h - z)$ , og setter  $\cos \alpha \approx 1$ , slik at

$$dP = \rho g(h - z)(Bdz). \quad (197)$$

Total trykkraft over flata ved  $x = a$  blir følgelig

$$P(a, t) = \int_0^h \rho g(h - z) B dz = \rho g B \frac{h^2(a, t)}{2}, \quad (198)$$

og tilsvarende ved  $x = b$ , der trykkraften virker i negativ  $x$ -retning:

$$P(b, t) = -\rho g B \frac{h^2(b, t)}{2}. \quad (199)$$

Den siste kraften som kommer inn er friksjonskraften mot bunnen. Det viser seg, delvis basert på dimensjonsanalyse, at en kan anta at friksjonskraften pr. flateenhet (skjærspenningen i  $x$ -retning) kan skrives

$$\tau = -\rho C_f \mathbf{v} |\mathbf{v}|. \quad (200)$$

Konstanten  $C_f$  kalles for *Chézy-faktoren* og diskuteres senere i kap. 7. Den totale friksjonskraften finnes derfor ved å integrere  $\tau$  over bunnflata:

$$F_f = - \int_a^b \rho C_f v^2 (B dx). \quad (201)$$

Setter vi alt dette sammen og forkorter med  $\rho B$ , får vi

$$\frac{d}{dt} \int_a^b v h dx + \left[ (v) v h + \frac{g}{2} h^2 \right]_a^b = \int_a^b (g \sin \alpha h - C_f v^2) dx. \quad (202)$$

Som en ser, kan det være litt møysommelig å få orden på bevarelsesloven, men prinsippet er ikke spesielt vanskelig. Differensialformuleringen følger på samme måte som ovenfor:

$$\frac{\partial (hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( v^2 h + \frac{g}{2} h^2 \right) = g \sin \alpha h - C_f v^2. \quad (203)$$

Ligningene 194 og 203 kalles gjerne *grunntvanns-ligningene* eller Saint-Venant ligningene og utgjør det som kalles et hyperbolsk system. Det finnes en teori for systemer med to ligninger som vi ikke skal gå inn på her, men ligningene kan generelt ikke løses analytisk. De er ellers mye brukt til tester av ulike numeriske teknikker for hyperbolske ligninger.

Det er imidlertid lett å se at ligningene har løsningen

$$\begin{aligned}h(x, t) &= h_0, \\v(x, t) &= v_0,\end{aligned}\tag{204}$$

der

$$g \sin \alpha h_0 - C_f v_0^2 = 0.\tag{205}$$

Med andre ord, friksjonen balanserer tyngdekraften. Lineær stabilitetsanalyse kan fortelle om hvorvidt løsningen er stabil, og denne analysen, som er analog til den som er gjort for ustabiliteter i en bilkø, finnes i boka til Whitham [19], s. 85-86.

Under visse situasjoner blir strømmingen ustabil, og mer avansert analyse leder da til såkalte "*roll waves*". *Roll waves* har vi alle sett under kraftig regnvær. Vann som renner nedover en skrå asfaltvei har da en tendens til å lage "bølger" som er nesten loddrette i forkant og beveger seg langsomt nedover i forhold til vannhastigheten (bilde nedenfor).

Hvis vi neglisjerer venstre side i lign. 203, sier vi at tyngdekraften alltid balanserer friksjonen, mens trykk-krefter og akselerasjonskrefter neglisjeres. Dette kalles *kinetisk teori* for flodbølgene. Da vil vi få en sammenheng mellom  $h$  og  $v$ :

$$v = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{1/2},\tag{206}$$

og følgelig får ligning 194 formen

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} \frac{\partial}{\partial x} h^{3/2} = 0.\tag{207}$$

Kinematisk hastighet blir

$$c(h) = \frac{d}{dh} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{1/2} = \frac{3}{2} v(h).$$

Vi overlater til leseren å vise at hvis vannstanden oppover i elva øker, med andre ord, hvis  $\partial h / \partial x < 0$ , kan det utvikles et sjokk som i så fall beveger seg nedover i elva som en vegg. Fenomenet kan oppstå i elver med regulert vannføring, for eksempel i elver fra kraftverk. Langs slike elver vil en finne advarsler fra e-verkene om at dette kan forekomme.

Legg merke til at hastigheten på sjokket vil være omlag 50% større enn hastigheten på vannstrømmen!

På fig. 21 og 22, som er hentet fra WEB-siden til Dr. Hubert Chanson, Univ. of Queensland, Australia (<http://www.uq.edu.au/~e2hchans/>), ser vi eksempler på noen tilsvarende situasjoner. Disse bølgene kalles tidevannsbårer (*tidal bores*), og de oppstår som sjokk-løsninger av lign. 194 og 203 i ei flat elv når tidevannet kommer inn fra munningen imot strømmen. Fig. 21 er det mest berømte eksemplet på en tidevannsbåre. Figur 22 viser et noe annet forløp. Bildet er fra elva



**Figur 21:** Tidevannsbåren på Qiantang River nær Hangzhou, China, også kjent som *Hangchow* eller *Hangzou Bore*. Bølgen kan bli opp til 9 meter høy og kommer in 2 ganger daglig. Den er mest utpreget rundt vår- og høstjevndøgn (© Dr. H. Chanson).

*Dorgonge* i Frankrike. *Seimen* hadde før i tiden en tilsvarende bølge som kunne nå helt til Paris i heldige tilfeller, men dette skal ikke lenger være så framtreddende.

Det siste bildet (fig. 23) er hentet fra A.C. Fowler's bildegalleri og viser *roll waves* på en vei. Bekker som går i ei renne kan oppvise tilsvarende bølger.

### 4.5.3 Det sirkulære vannspranget

Alle som har tappet vann loddrett ned i badekaret, tappet vann i oppvask-kummen, holdt en hageslange loddrett mot steinhelle o.l., har observert at det ofte danner seg et sirkulært *vannsprang* et stykke fra der strålen treffer (Hvis dette ikke lyder familiært, bør en før en leser videre gjøre et enkelt eksperiment i kjøkkenvasken!). Vannspranget var tema for en eksamensoppgave i omkring 1986. Etter en del år ble vi klar over at løsningen som var angitt i oppgaven ikke var helt bra selv om dette ikke hadde noen betydning for selve eksamensbesvarelsen. I september 1993 ble det i det anerkjente tidsskriftet *Journal of Fluid Mechanics* presentert en omfattende analyse av problemet som ga flere litteraturhenvisninger og faktisk påpekte at mange eldre studier var feil. Geometrien i problemet er angitt på figur 24. Vi antar radiell symmetri og at tettheten  $\rho$  er konstant. Videre antar vi at vannhastigheten er rettet radielt utover og er uavhengig av  $z$ . Dermed blir både hastighet og dybde kun funksjoner av  $r$  og  $t$ . For trykket vil vi også anta at det er gitt av hydrostatisk trykk,  $p(r, t, z) = \rho g(h(r, t) - z)$  siden et eventuelt konstant atmosfæretrykk er uten betydning. Friksjonskraften pr. flateenhet mot planet har formen  $\mathbf{t}_C = -C_f \rho |\mathbf{v}| \mathbf{v}$  ( $C_f$  er *Chezy's friksjonsfaktor*).

La oss stille opp de generelle bevarelseslovene for masse og impuls for et kontrollvolum begrenset av  $r_1$  og  $r_2$ ,  $r_1 < r_2$ , der  $r_1$  er større enn radien på sentrumsstrålen. Fra massebevarelsesloven

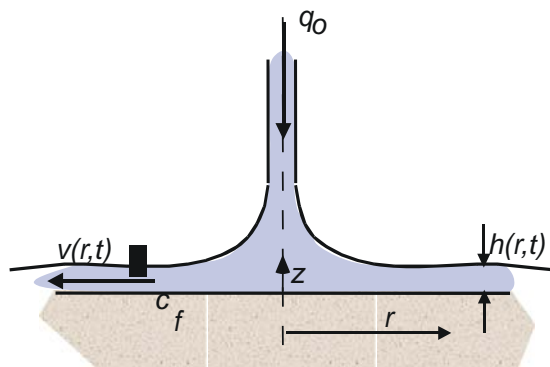
$$\frac{d}{dt} \int_R \rho dV + \int_{\partial R} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0 \quad (208)$$



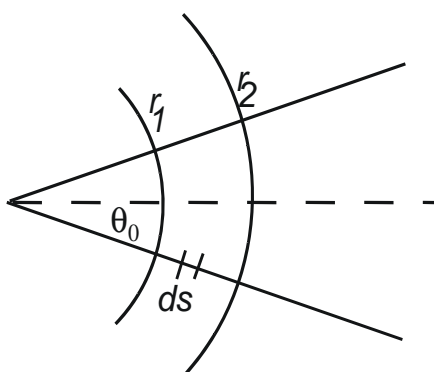
**Figur 22:** Surfere på tidevannbåre som kommer inn ved Dordogne (© Dr. H. Chanson).



**Figur 23:** *Roll waves* på en asfaltvei under regnvær (Bildet har blitt kopiert fra <http://www.maths.ox.ac.uk/~fowler/pictures/gallery.html>).



**Figur 24:** Loddrett vannstrøm ned mot en plate.



**Figur 25:** Sektorformet kontrollvolum for impulsbalansen.

får vi umiddelbart ved å benytte polarkoordinater og dividere med  $2\pi\rho$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{r=r_1}^{r_2} h(r,t)rdr + r_2h_2v_2 - r_1h_1v_1 = 0. \quad (209)$$

For impulsbevarelsen er et slikt kontrollvolum ubrukbart siden alle ledd på grunn av symmetri reduserer seg til null. For å få noe fornuftig ut, er det nødvendig å velge et *sektorformet* utsnitt som kontrollvolum og se på impulsbalansen i f.eks.  $x$ -retning, se fig. 25.

Siden trykket på bunnflata virker vertikalt, er det nok å se på trykk-kreftene på sideveggene. Trykk-kreftene som virker på en stripe av sideveggen i kontrollvolumet kan etter forutsetningen



skrives  $dP = \rho gh^2(r, t) ds/2$ . Ved å integrere rundt alle veggene får vi da

$$\begin{aligned}
 P_x &= \int_{\text{Sidekant.}} -pn_x d\sigma = \\
 &= \frac{1}{2} \rho gh^2(r_1, t) \int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta r_1 d\theta - \frac{1}{2} \rho gh^2(r_1, t) \int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta r_2 d\theta + 2 \frac{1}{2} \rho g \sin \theta_0 \int_{r=r_1}^{r_2} h^2(r, t) dr = \\
 &= \rho g \sin \theta_0 \left( h^2(r_1, t) r_1 - h^2(r_2, t) + \int_{r=r_1}^{r_2} h^2(r, t) dr \right)
 \end{aligned} \tag{210}$$

For bunnfriksjonen får vi for kraften som virker i  $x$ -retning:

$$C_x = - \int_{r=r_1}^{r_2} \int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0} C_f \rho v \cdot (v \cos \theta) r dr d\theta = -2C_f \rho \sin \theta_0 \int_{r=r_1}^{r_2} v^2(r, t) r dr. \tag{211}$$

Resten av bidragene i bevarelsesloven gir oss

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho v_x dV = \frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_0^{h(r,t)} \rho (v \cos \theta) r dr d\theta dz = 2\rho \sin \theta_0 \frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} v(r, t) h(r, t) r dr, \tag{212}$$

og

$$\int_{\partial R} (\rho v_x) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2\rho \sin \theta_0 (-v_1^2 h_1 r_1 + v_2^2 h_2 r_2). \tag{213}$$

Alle ledd inneholder  $2\rho \sin \theta_0$  som felles faktor, slik at vi ender opp med

$$\frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} v h r dr + \left[ v^2 r h + \frac{r}{2} h^2 g \right]_{r_1}^{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} \left( -C_f v^2 r + \frac{h^2}{2} g \right) dr. \tag{214}$$

Differensialformuleringene for masse og impuls følger på vanlig måte:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(rh)}{\partial t} + \frac{\partial(rhv)}{\partial r} &= 0, \\
 \frac{\partial(rhv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(rhv^2 + rh^2g/2) &= -C_f v^2 r + \frac{h^2}{2} g
 \end{aligned} \tag{215}$$

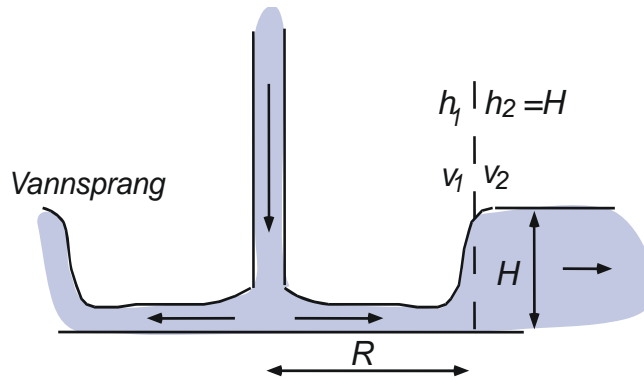
Ved passende utstrømning vil det dannes et *stasjonært ringformet sprang* et stykke fra der sentrumsstrålen treffer, som antydnet på figur 26. Dette vannspranget er egentlig et sjokk som på engelsk kalles *the hydraulic jump*. Hvis vi antar stasjonær strøm og lar  $r_1 \rightarrow r_2 = R$  i bevarelseslovene, vil alle integralene i bevarelseslovene forsvinne, og vi ender opp med følgende klassiske *sjokkbetingelser* (J.-B. Belanger, 1838 [18]):

Fra massebevarelsen:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2. \tag{216}$$

Fra impulsbevarelsen:

$$v_1^2 h_1 + \frac{1}{2} h_1^2 g = v_2^2 h_2 + \frac{1}{2} h_2^2 g. \tag{217}$$



**Figur 26:** Dannelse av et sirkulært vannsprang.

Dette er ikke nok til å bestemme sjokket, og i oppgaven var det antydnet at en skulle benytte *Bernoullis ligning* som for stasjonær strøm i ideell væske sier at *størrelsen*

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \quad (218)$$

er konstant langs strømlinjer. Hvis en da følger en strømlinje langs overflaten (eller alternativt langs bunnen) over sjokket, får vi en tredje betingelse:

$$gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = gh_2 + \frac{v_2^2}{2}. \quad (219)$$

Hvis en forlanger at  $h_1 \neq h_2$ , vil ikke de tre betingelsene tilsammen ha noen løsning. I virkeligheten er det et *energitap* i sjokket som gjør at energibetingelsen må modifiseres til

$$gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = gh_2 + \frac{v_2^2}{2} + gh_L. \quad (220)$$

Størrelsen  $h_L$  i ekstraeddret på høyre side kalles på engelsk *head loss* og er i utgangspunktet ukjent.

Ligningene 216, 217 og 219 har opplagt løsningen  $h_1 = h_2$ ,  $v_1 = v_2$ ,  $h_L = 0$  som ikke er spesielt spennende. Etter en del manipulering er det imidlertid mulig å kombinere 216 og 217 til

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1} = 2\frac{v_1^2}{gh_1}. \quad (221)$$

Lesere med bakgrunn i fluidmekanikk vil muligens gjenkjenne kombinasjonen på høyre side som kvadratet av *Froudes tall for strømning med fri overflate*,

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}. \quad (222)$$

Annengradsligningen for  $h_2/h_1$  har løsningen

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right) \quad (223)$$

For at  $h_1 < h_2$  må  $Fr_1 > 1$ . For at vi skal få et vannsprang, må altså Froudetallet foran spranget være større enn 1. Froudetallet har i denne forbindelse en interessant fysisk tolkning: Vannbølger

(lenger enn et par centimeter) på grunt vann har forplantningshastighet  $c_p = \sqrt{gh}$  (Med *grunt vann* menes vanddyb mindre enn ca. 5% av bølgelengden). Dermed blir altså Froudetallet forholdet mellom  $v$  og  $c_p$ . Strømning med fri overflate der  $v > c_p$  kalles *overkritisk strømning*. En forstyrrelse foran i vannstrømmen kan ikke varsles bakover med en overflatebølge hvis  $v > c_p$ . Som en forstår, er derfor  $Fr$  analogt til *Machtallet* i aerodynamikk. Fra energibetingelsen kan vi til og med finne et uttrykk for det relative energitapet i sjokket uttrykt som forholdet  $h_L/h_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{h_L}{h_1} &= \frac{h_1 - h_2 + v_1^2/2g - v_2^2/2g}{h_1}, \\ &= 1 - \frac{h_2}{h_1} + \frac{Fr^2}{2} - \frac{v_2^2}{2gh_1} = 1 - \frac{h_2}{h_1} + \frac{Fr^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{h_2/h_1} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (224)$$

der en så fører inn uttrykket for  $h_2/h_1$ .

Men hva blir posisjonen til vannspranget? I eksamensoppgaven var det antydning en forenklet situasjon der en skulle neglisjere energitapet i spranget, anta at høyden  $h_2 = H$  etter spranget var kjent, og ellers at  $h_1 \ll H$  og  $v_1 \gg v_2$ . Fra de tre sjokkbetingelsene kan en da enkelt vise at

$$R = \sqrt{\frac{2}{gH^3}} \frac{q_0}{\pi}. \quad (225)$$

Denne formelen er nok tvilsom siden de samme betingelsene også gir  $h_1 = H/4$ ! Nå er det imidlertid mulig å regne ut  $R$  nøyaktig hvis en i tillegg antar en *gitt energidissipasjon* i sjokket. Det fins også en enklere måte [18] som ser bort fra alle andre energitap enn i selve sjokket. Hvis kinetisk energi i strømmen før sjokket er mye større enn potensiell energi, vil hastigheten i følge Bernoullis ligning være omlag konstant og lik  $U_0$ , det vil si hastigheten til strålen i det den treffer plata (tenk på en strømlinje som kommer ned langs kanten på strålen og følger overflaten utover mot spranget). Da får vi fra masse og impulsbetingelsene

$$\begin{aligned} q_0 &= 2\pi R h_1 U_0 = 2\pi R H v_2, \\ U_0^2 h_1 + h_1^2 g/2 &= v_2^2 H + H^2 g/2, \end{aligned} \quad (226)$$

som etter en enkel omforming gir

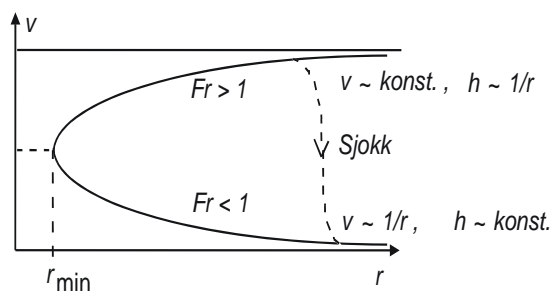
$$R = \frac{(U_0^2 - gH/2)q_0}{\pi g H^2 U_0}. \quad (227)$$

Det er ikke urimelig at  $U_0$  kommer inn i tillegg til  $q_0$ , siden både tilført impuls og masse bør være av betydning for plasseringen av spranget.

I [3] gir forfatterne en omfattende analyse av vannspranget der de først ser på det ikke-viskøse tilfellet med ideell væske og argumenterer deretter for at viskositeten er essensiell for å bestemme hvor sjokket skal plasseres. Uten bunnfriksjon gir massebevarelsen og Bernoulli

$$\begin{aligned} rhv &= C_1, \\ \frac{v^2}{2} + gh &= C_2 \end{aligned} \quad (228)$$

(der  $C_2$  riktignok endrer verdi over sjokket). Med passende dimensjonsløse variable, som på figur 27 fremdeles er betegnet  $r, v$  og  $h$ , ser vi at det for  $r > r_{\min}$  er to mulige strømningsmønstre. Øverste gren svarer til et Froudetall større enn 1, mens nedre gren har Froudetall mindre enn 1. Sjokket oppstår der *strømningen hopper fra øvre til nedre gren*.



**Figur 27:** Det er to løsninger for hastighet som funksjon av radius,

Ved å trekke inn viskositet greier forfatterne, etter en relativt komplisert analyse som det vil føre for langt å komme inn på her, å vise at for en uendelig stor horisontal plate, vil radien ut til sjokket være omlag

$$R \approx .7 \times q_0^{5/8} \nu^{-3/8} g^{-1/8}. \quad (229)$$

Formelen påstås å stemme rimelig bra med eksperimenter når  $q_0$  ikke er for stor. Når  $q_0$  og hastigheten øker, blir sjokk-sonen temmelig turbulent og strømmingen langt fra pen og radiell.

## 5 DIFFUSJON OG KONVEKSJON

En materialvariabel var en størrelse som passivt ble transportert med det strømmende mediet. Det er slett ikke alltid dette er en fornuftig situasjon. På liten skala er *molekylær diffusjon* et fenomen som blander væsker og gasser ved at molekylene tumler om hverandre slik at det for oss ser ut som de blandes gradvis. Dette gjelder også hvis vi tilsetter finfordelte partikler til en væske (blanding ved *Brownsk bevegelse*). Vi får med andre ord en variabel tetthet av den tilsatte væsken eller stoffet etterhvert som blandingen skjer. Det er forskjeller i konsentrasjon som gir opphav til diffusjon. Hvis mediet beveger seg, vil vi også få en endring på grunn av transport. Slik transport kalles *konveksjon*.

I lite viskøse væsker vil en ofte ha hastigheter og lengdeskalaer slik at det utvikles *turbulens*. Turbulens er kaotisk bevegelse der strømmingen gjerne utvikler virvler og tynne sjikt som spinner inn i hverandre og splittes opp (røyk i luft visualiserer dette godt). Hvis vi tilsetter et fremmed stoff til et medium, vil vi ofte observere at blandingen går mye raskere når strømmingen er turbulent enn den gjør hvis blandingen skjer ved diffusjon alene (det er naturligvis derfor vi rører om i koppen!). Modellering av turbulent blanding er et klassisk problem. Det enkleste vil være å prøve å beskrive det som en *forsterket diffusjon*, men det er også eksempel på at en slik beskrivelse leder helt galt av sted. Turbulens i væsker kan oppstå når hastigheten varierer for kraftig fra sted til sted (kalt hastighetsskjær i fluidmekanikk). Ellers kan turbulens induseres av temperatur og tetthetsforskjeller (når en varmer vann, settes vannet i bevegelse når temperaturforskjellen mellom toppen og bunnen av vannet blir stor nok). I kapittel 6 skal vi vise hvordan en kan utlede bevarelseslover for turbulens fra bevarelseslovene i kapittel 4.

Foruten molekylær diffusjon og turbulens har “diffusjonslignende” spredning vist seg å være svært anvendbart i andre sammenhenger. Mange ganger er starten et *diskret* fenomen, gjerne basert på stokastisk tilfeldig gang. Matematisk kan en vise at slike modeller i grensen faktisk går over i diffusjonsmodeller. En kan også lett tenke seg at epidemier spres ved en slags tilfeldig gang

som kan lede til diffusjonsmodeller. Det finnes en rekke andre lignende situasjoner.

## 5.1 Bevarelsesloven med diffusjon

Hvis vi har et stoff som brer seg ved diffusjon i en væske, blir det satt opp en fluks pga. konsentrasjonsforskjeller. Hvis konsentrasjonen er konstant, vil det ikke bli noen *netto* fluks selv om en naturligvis kan ha blanding på mikroskopisk nivå. Til *første orden* vil fluksen måtte bli proporsjonal med endringen i konsentrasjonen pr. lengdeenhet, med andre ord

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi. \quad (230)$$

Dette er *Ficks lov for diffusjon* og  $\sigma$  kalles *diffusjonskoeffisienten*. Varmeledning i et stoff i ro tilfredstiller en tilsvarende lov. Hvis egenvarmen er konstant, vil  $\mathbf{q} = -k \nabla T$ , der  $T$  er temperaturen og  $k$  kalles *varmeledningskoeffisienten*. Loven kalles *Newtons varmeledningslov*.

Diffusjon har en *utsmørende virkning* på konsentrasjonsgradienter. Om vi i utgangspunktet starter med en lokalisert mengde i en væske, vil de store konsentrasjons-gradientene bare forekomme langs kantene til mengden. Når vi rører om og utvikler turbulens, vil mengden strekkes ut slik at en stadig større andel befinner seg i områder med sterke gradienter. Dermed virker diffusjon sterkere, og dette er mekanismen som ligger bak det vi oppfatter som en forsert blanding, eller forsterket diffusjon ved turbulens.

La oss nå se på en generell situasjon der  $c(\mathbf{x}, t)$  er konsentrasjon av et stoff i en væske, og vektorfeltet  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  er fluksen til stoffet. Anta at stoffet spres med en "diffusjons"-fluks  $\mathbf{j}_d$  selv om væsken er i ro. Hvis stoffet passivt følger strømmen, har vi før vist at fluksen  $\mathbf{j}_c(\mathbf{x}, t) = c\mathbf{v}$ . Vi ønsker å vise at vi med en kombinasjon av disse to fluksene får resultatet  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}_d(\mathbf{x}, t) + \mathbf{j}_c(\mathbf{x}, t)$ . La  $R(t)$  være en materialregion av væsken mye mindre enn skalaen for variasjoner i  $\mathbf{v}$ . For tidsintervaller av orden  $\text{diam}(R(t))/|\mathbf{v}|$  vil  $R(t)$  ikke endres nevneverdig, og en observatør som reiser med  $R(t)$  vil derfor sette opp

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{R(t)} c(\mathbf{x}, t) dV \right|_{t=0} + \int_{\partial R(0)} j_d(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{R(0)} q(\mathbf{x}, t) dV. \quad (231)$$

Men Reynolds transportteorem anvendt på første ledd gir

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{R(t)} c(\mathbf{x}, t) dV \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{R(0)} c(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial R(0)} c(x, 0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (232)$$

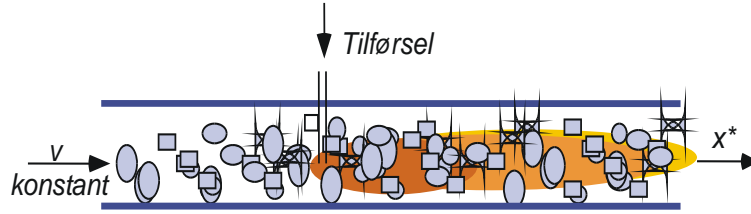
som tilsammen blir

$$\frac{d}{dt} \int_R c dV + \int_{\partial R} (\mathbf{j}_d + c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_R q dV. \quad (233)$$

Et generelt kontrollvolum kan deles opp i smådeler der denne formelen holder. Når en deretter summerer, vil flateintegralene over felles grenser kansellere slik at en ender opp med samme formel for hele området. Dette blir følgelig den generaliserte bevarelsesloven, og *total fluks* er som forventet  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}_d(\mathbf{x}, t) + \mathbf{j}_c(\mathbf{x}, t)$ .

Hvis vi benytter divergensteoremet slik som i kap. 2, finner vi differensialformen:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_d + \mathbf{v}c) = q. \quad (234)$$



**Figur 28:** Skisse av en enkel endimensjonal kjemisk reaktor. Væske strømmer gjennom et rør fylt med glasskuler.

Med  $\mathbf{j}_d = -\sigma \nabla c$  får vi en såkalt *konveksjons/diffusjonsligning*:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}c) - \nabla \cdot (\sigma \nabla c) = q. \quad (235)$$

Generelt kan både  $\mathbf{v}$  og  $\sigma$  avhenge av  $c$  slik at ligningen blir ikke-lineær. I neste avsnitt skal vi gå gjennom en enkel matematisk modell der denne ligningen kommer inn på en sentral måte.

## 5.2 En-dimensjonal kjemisk reaktor

En enkel *kjemisk reaktor* består av et rør (ofte fylt med glasskuler) der det strømmer en væske med konstant middel-hastighet  $v$ . Væsken tilsettes et stoff fra en dyse i rørvæggen. Stoffet blandes med konstant diffusjonskoeffisient  $\sigma$  som gjerne er en *effektiv diffusjonskoeffisient* pga. turbulent blanding fra strømmingen rundt glasskulene), illustrert på fig. 28.

Konsentrasjonen av stoffet (utenom kildeområdet) blir da beskrevet av den en-dimensjonale utgaven av ligning (235):

$$\frac{\partial c}{\partial t^*} + v \frac{\partial c}{\partial x^*} - \sigma \frac{\partial^2 c}{\partial x^{*2}} = 0. \quad (236)$$

Skalering av  $x^*$  med en typisk rørlengde  $L$  og en tilhørende tidsskala  $T = L/v$  gir oss

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0, \quad (237)$$

der  $\varepsilon = \sigma/Lv$  er en dimensjonsløs parameter, lignende Reynoldstallet. Når  $\varepsilon$  er liten, har vi en ligning med en liten parameter foran høyeste deriverte. I det tilfellet dominerer altså konveksjon over diffusjon. Når  $\varepsilon \neq 0$ , vil ligningen være av *parabolisk* klasse, mens den er *hyperbolsk* når  $\varepsilon = 0$ . Her er det altså ikke bare *ordenen* til ligningen som endres, klassen endres også.

La oss se på løsningen av *initialverdiproblemet*

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ c(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (238)$$

For  $\varepsilon = 0$  er ligningen  $c_t + c_x = 0$ , og vi så allerede i seksjon 2.5 at løsningen da var gitt av

$$c(x, t) = f(x - t). \quad (239)$$

Tetthetsforløpet beveger seg uendret med strømmen med hastighet 1 (hastighet  $v$  i de opprinnelige variablene). Dette er naturligvis også opplagt fra et rent fysisk resonnement. Når  $\varepsilon > 0$  lønner det

seg også å føre inn et koordinatsystem som følger strømmen:

$$\begin{aligned}x' &= x - t, \\t' &= \varepsilon t.\end{aligned}\tag{240}$$

Da får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial c}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \varepsilon c_{t'} - c_{x'}, \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial c}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = c_{x'}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= c_{x'x'}.\end{aligned}\tag{241}$$

og følgelig vil  $c_t + c_x - \varepsilon c_{xx} = \varepsilon c_{t'} - c_{x'} + c_{x'} - \varepsilon c_{x'x'} = 0$ , eller

$$c_{t'} = c_{x'x'}.\tag{242}$$

som er den klassiske paraboliske ligningen. Vi overlater til leseren å overbevise seg om at funksjonen

$$c_f(x', t') = \frac{1}{\sqrt{4\pi t'}} \exp\left(-\frac{x'^2}{4t'}\right)\tag{243}$$

er en løsning for  $t' > 0$ . Dette er den såkalte *fundamentalløsningen*. Fra formelen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\tag{244}$$

finner vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_f(x', t') dx' = 1\tag{245}$$

for alle  $t' > 0$ . Fundamentalløsningen er med andre ord en Gauss-fordeling med varians som øker lineært med tiden. Når  $t' \rightarrow 0$ , går løsningen mot en *deltafunksjon* i origo. Fysisk svarer dette til at en slipper ut en enhets-mengde av stoffet i origo ved tiden  $t' = 0$ .

Hvis vi går tilbake til umerkede koordinater, får vi

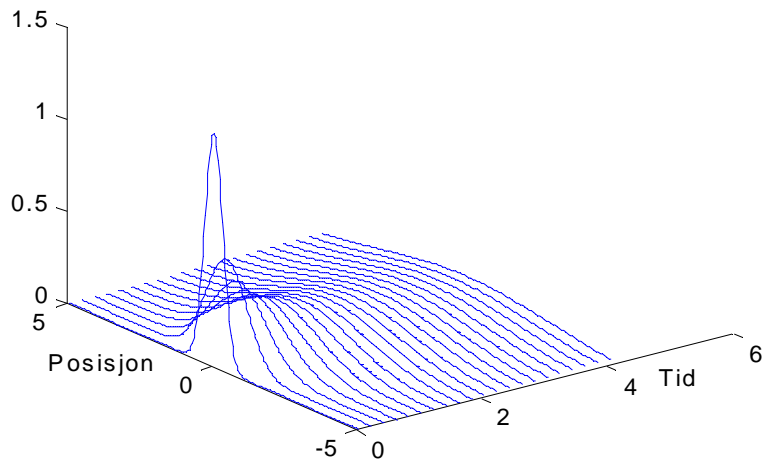
$$c_F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{4\varepsilon t}\right)\tag{246}$$

Løsningen er skissert på figur 29. Det er lett å vise at den generelle løsningen av initialverdi-problemet  $c(x, 0) = f(x)$  kan uttrykkes som et *konvolusjonsintegral* med fundamentalløsningen

$$c(x, t) = \int_{s=-\infty}^{\infty} f(s) c_F(x-s, t) ds.\tag{247}$$

En generell egenskap med konvolusjon sier at resultatet er minst like pent som den peneste av funksjonene som inngår, og derfor vil løsningen  $c(x, t)$  være uendelig mange ganger deriverbar for  $t > 0$  uansett hvordan  $f$  ser ut. Diskontinuiteter vil glattes mer og mer ut etterhvert som tiden går. Hvor raskt utsmøringen skjer, avhenger av størrelsen på  $\varepsilon$ . I dette tilfellet blir løsningen glattere og glattere, men for mer generelle ikke-lineære konveksjons/diffusjonsligninger behøver dette ikke å være tilfelle.

Lineære diffusjonsligninger er inngående behandlet i alle lærebøker om partielle differensialligninger. Etterhvert har det også kommet bøker som omhandler ikke-lineære ligninger.



**Figur 29:** Tidsutvikling av fundamentalløsningen (for  $\varepsilon = 1$ ).

### 5.3 Asymptotiske løsninger

Nedenfor skal vi gi et enkelt eksempel på et prinsipp som på engelsk kalles *intermediate asymptotics* [1]. Prinsippet sier at løsninger av differensialligninger asymptotisk under visse betingelser har en tendens til å nærme seg idealiserte løsninger som for eksempel fundamentalløsningen av diffusjonsligningen. Vi skal basere vår argumentasjon på skalering, og ikke presentere matematiske bevis.

Eksemplet tar utgangspunkt i diffusjonsligningen

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} = \kappa \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^{*2}}, \quad 0 < t^*, \quad -\infty < x^* < \infty \quad (248)$$

med startbetingelsen  $c^*(x^*, 0) = f(x^*)$ , der  $f$  nå er en funksjon lokalisert til intervallet  $[-L, L]$  slik at

$$\int_{-L}^L f(x^*) dx^* = Q_0, \quad (249)$$

$$f(x^*) = 0 \text{ for } |x^*| \geq L. \quad (250)$$

For store  $t$ ,  $t = O(T)$ , forventer vi at løsningen på grunn av diffusjon vil ha fått en romlig utbredelse  $X = O(\sqrt{\kappa T})$ , der  $X \gg L$ . La oss derfor skalere problemet med  $T$ ,  $X$  og  $Q_0/X$

$$\begin{aligned} t^* &= Tt, \\ x^* &= Xx = \sqrt{\kappa T}x, \\ c^* &= \frac{Q_0}{X}c. \end{aligned} \quad (251)$$

Dette gir umiddelbart

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (252)$$



mens startbetingelsen blir

$$f(x) = c(x, 0) = \frac{X}{Q_0} c^*(xX, 0) = \frac{X}{Q_0} f^*(Xx). \quad (253)$$

Dermed ser vi at  $f(x) = 0$  for  $|x| > \varepsilon = L/X$ , og

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{Q_0} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(Xx) X dx = 1. \quad (254)$$

Problemet har dermed fått formen

$$c_t = c_{xx}, \quad c(x, 0) = f(x), \quad (255)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad f(x) = 0 \text{ for } |x| > \varepsilon. \quad (256)$$

Ute ved  $t = O(1)$  fortøner denne startbetingelsen seg som en  $\delta$ -funksjon uansett hvor irregulær  $f$  er, og løsningen må dermed være omtrent som fundamentalløsningen (Argumentet kan gjøres matematisk presist ved å studere løsningen uttrykt ved hjelp av konvolusjonsintegralet). Fundamentalløsninger o.l. har dermed større anvendelse enn en skulle tro:

*For store tider viskes detaljene i startbetingelsene ut og en kan benytte løsninger som stammer fra enklere startbetingelser.*

## 5.4 Utslipp fra et kjernekraftverk

I dette avsnittet viser vi hvordan en kan benytte bevarelsesprinsipper og enkle egenskaper ved løsningen av den en-dimensjonale konveksjons/diffusjonsligningen til å analysere et tenkt utslipp av radioaktivt materiale. Analysen er typisk for hvordan en vil prøve å skaffe seg en *første oversikt* over et relativt vanskelig modelleringsproblem. Situasjonen er naturligvis oppdiktet.

Fra et kjernekraftanlegg skjer det et ukontrollert utslipp av radioaktivt kjølevann til ei elv som passerer kraftverket. Vi skal anta at radioaktiviteten i hovedsak skyldes en bestemt kortlivet isotop. Verdiene på parametrene nedenfor ble valgt noe tilfeldig for å få rimelig enkle tallsvaer.

Det spesielle her er at radioaktivt materiale brytes ned. Hvis vi har en oppløsning med konsentrasjon  $c$  av radioaktivt materiale, vil konsentrasjonen avta eksponensielt med tiden,

$$c(t) = c(0) \exp(-t/t_0). \quad (257)$$

Dette kan en også beskrive ved hjelp av differensialligningen

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{c}{t_0} \quad (258)$$

der  $t_0 \ln 2$  er *halveringstiden* for isotopen.

Vi antar at elvevannet renner med en middelhastighet  $U = 0.2\text{m/s}$ . I virkeligheten vil vannhastigheten variere med elveløpets topografi, og vannmassene blandes og spres både ved turbulens og ved at vannhastigheten ikke er konstant over elve-tverrsnittet. I praksis bruker en å modellere dette ved en såkalt såkalt *eddy-diffusivitet* (eddy=virvel), som defineres av en diffusjonskoeffisient  $\kappa$  i lengderetningen av elva. Diffusjonskoeffisienten vil ha samme dimensjon som den molekylære diffusjonskoeffisienten, men vil være mye større. Her setter vi  $\kappa$  til  $1\text{m}^2/\text{s}$ , som ikke er en helt

urimelig verdi. Vi regner elva en-dimensjonal og antar at utslippet er fra en stasjonær, punktformet kilde.

Når vi nå skal formulere bevarelsesloven, vil  $c$  komme inn som tetthet med enhet kg/m, mens fluksen vil ha to bidrag, ett fra diffusjon og ett fra konveksjon (drift),

$$J(x, t) = c(x, t)U - \kappa \frac{\partial c}{\partial x}(x, t). \quad (259)$$

Den avtagende radioaktiviteten kan modelleres som et sluk med intensitet  $\frac{c}{t_0}$ . Utslippet antas å være en  $\delta$ -funksjons-kilde i  $x = 0$ . Endringen av radioaktivt materiale innenfor et intervall  $[x_1, x_2]$  blir følgelig beskrevet av bevarelsesloven

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} c(x, t) dx + J(x_2, t) - J(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \left( -\frac{c(x, t)}{t_0} + q(t)\delta(x) \right) dx. \quad (260)$$

Utslippsledet vil bare bidra hvis  $0 \in [x_1, x_2]$ . På differensialform blir ligningen

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -\frac{c}{t_0} + q(t)\delta(x), \quad (261)$$

som er en lineær konveksjon/diffusjonsligning med kildeledd. Anta at utslippet har foregått med en konstant mengde  $q_0$  pr. tidsenhet fra tiden  $t = 0$ . Den totale mengden av radioaktivt materiale i elva til enhver tid kan da enkelt beregnes fra bevarelsesloven ved å integrere fra  $x_1 = -\infty$  til  $x_2 = \infty$ :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\frac{C}{t_0} + q_0, \\ C(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx. \end{aligned} \quad (262)$$

Legg merke til at fluksleddene forsvinner siden  $\lim_{x \rightarrow \infty} J(x, t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} J(x, t) = 0$ . Løsningen for  $C(t)$  under forutsetningen av at  $C(0) = 0$  følger umiddelbart:

$$C(t) = q_0 t_0 (1 - \exp(-t/t_0)). \quad (263)$$

Når  $t \rightarrow \infty$ , vil den totale mengden  $C(t)$  gå mot  $q_0 t_0$ .

Vi skal så betrakte en situasjon der et konstant utslipp  $q_0$  varer i  $t_1 = 30$  minutter, og vi vil prøve å komme fram til en tilnærmet løsning for  $c$  ved to ulike tidspunkt; (i) umiddelbart etter at utslippet var over, og (ii) etter  $t_2 = 10^6$  sekunder, som er ca. 11.5 dager.

Etter at de 30 minuttene er over, er det en total mengde

$$C_0 = t_0 q_0 (1 - e^{-t_1/t_0}) \approx t_1 q_0 \quad (264)$$

i vannet (legg merke til at  $t_1 \ll t_0$ ). Konveksjonen (dvs. bevegelsen av vannmassene med middelhastighet  $U$ ) har ført til at det radioaktive materialet er spredt utover en lengde  $L = Ut_1 = 360$ m. Hvor mye diffusjon har påvirket løsningen finner vi ved å estimere *lengdeskalaen* for diffusjon,

$$\sigma_1 = \sqrt{2\kappa t_1} = 60\text{m}. \quad (265)$$

Dette er vesentlig mindre enn  $L$ . Siden det heller ikke er nevneverdig radioaktiv nedbryting, vil konsentrasjonen,  $c_0$ , være tilnærmet konstant fra  $x = 0$  til  $x = L$ , og massebalanse gir  $c_0 L = q_0 t_1$ . Dermed blir

$$c(x, t_1) \approx \begin{cases} c_0 = q_0/U, & 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (266)$$

Egentlig skal denne løsningen ”avrundes” litt på endene, men her kan vi altså med god tilnærminge neglisjere både radioaktiv nedbryting og turbulent diffusjon.

Etter  $10^6$  sekunder er dispersjon og nedbryting ikke lenger neglisjerbare. Lengdeskalaen for diffusjon er nå

$$\sigma_2 = \sqrt{2\kappa t_2} \approx 1400\text{m}, \quad (267)$$

som er vesentlig større enn den opprinnelige lengden  $L$  på utslippet. Den totale mengden radioaktivt materiale er gitt fra

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x, t_2) dx = [q_0 t_1 (1 - e^{-t_1/t_0})] e^{-(t_2-t_1)/t_0} \approx q_0 t_1 \exp(-t_2/t_0) \quad (268)$$

I forhold til mengden ved slutten av utslippet er mengden  $\exp(-t_2/t_0) \approx 0.8 \cdot 10^{-12}$  mindre.

Siden  $t_1 = 30$  minutter er mye mindre enn  $t_2 = 10^6$  s, og  $L/\sigma_2 \approx 0.25$ , kan vi med god nøyaktighet anta at alt utslipp av radioaktivt materiale skjedde ved tiden null. Vi kan da utnytte *fundamentalløsningen* til konveksjon/diffusjonsligningen

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left[-\frac{(x - Ut)^2}{4\kappa t}\right], \quad (269)$$

som gir oss løsningen av et enhets-utslipp i  $t = 0$  og  $x = 0$ . Løsningen blir tilnærmet

$$c(x, t_2) \approx [q_0 t_1 \exp(-t_2/t_0)] \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t_2}} e^{-(x-Ut_2)^2/(4\kappa t_2)}, \quad (270)$$

der første del betegner totalt gjenværende radioaktivt materiale og  $Ut_2 = 200\text{km}$ .

Det er også enkelt å sette opp løsningen for et vilkårlig tidsvariabelt utslipp  $q(t)$  fra en stasjonær, punktformet kilde. Siden vi kan anta at utslippene til forskjellig tid ikke påvirker hverandre, er det greit å betrakte utslippene som en serie punkt-utslipp, og deretter summere de tilsvarende løsningene (Dette er igjen en sentral og karakteristisk egenskap ved diffusjonsligningen).

På samme måte som ovenfor, blir løsningen fra et utslipp over tidsrommet  $d\tau$  ved et tidspunkt  $\tau < t$

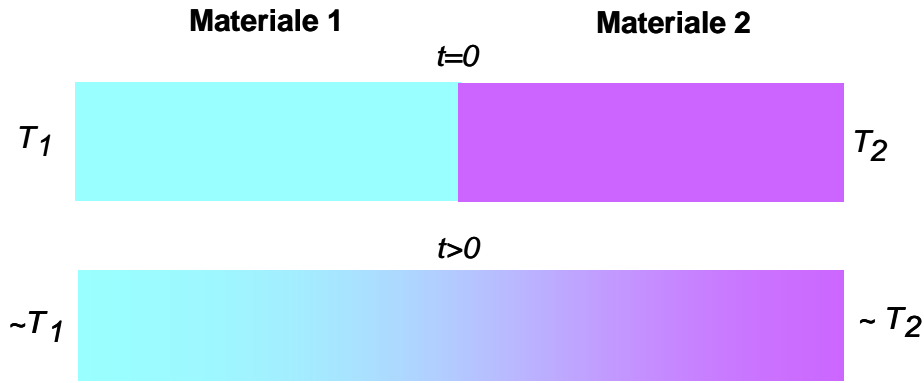
$$dc(x, t) = [q(\tau)d\tau \exp(-(t - \tau)/t_0)] F(x, t - \tau). \quad (271)$$

Fordeling av radioaktivt materiale ved tidspunktet  $t$  er altså gitt ved integralet

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \int_{-\infty}^t dc(x, t) \\ &= \int_{-\infty}^t [q(\tau)d\tau \exp(-(t - \tau)/t_0)] F(x, t - \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (272)$$

I praksis vil radioaktive utslipp ofte omfatte flere isotoper. Nedbryting av én isotop vil også kunne lede over i en annen radioaktiv isotop. Dette vil føre til en kobling mellom bevarelseslovene for de enkelte isotopene, men koblingen er begrenset til kildeleddene. Modelleringen av elva vil naturligvis også kunne gjøres vesentlig mer avansert. Spesielt vil turbulent blanding beskrives av modeller som relaterer styrken på diffusjonen til mengden av turbulent kinetisk energi. Modelleringen vil i første omgang beregne strømmingen og turbulensnivået i vannet ved hjelp av en *hydrodynamisk turbulens*-modell. Deretter kjøres en *transportmodell* som beregner utbredelsen av det radioaktive materialet med basis i den hydrodynamiske løsningen.

Etterhvert har det kommet krav til industrien om at slike modeller utvikles og testes *før* det skjer en ulykke (modellene kan faktisk testes ved kontrollerte utslipp av radioaktive isotoper).



Figur 30: Temperatur i blokkene for  $t = 0$  og etter en stund i kontakt.

## 5.5 Similaritetsløsninger

Så langt har vi alltid kunnet skalere variablene i ligningene våre, men for noen "akademiske problemer" finnes det ingen naturlige skalaer å bruke. Fundamentalløsningen til den lineære diffusjonsligningen et slikt eksempel. Det er umulig å finne fornuftige tids- og romskalaer for dette problemet på forhånd. Nå viser det seg at løsningen får en slik form at dette heller ikke er nødvendig. Hvis det ikke fins skalaer å bruke, må vi kombinere de variable for å få dimensjonsløse ligninger.

Vi skal ikke gå nærmere inn på teorien for similaritetsløsninger (*similarity solutions*), der ikke minst den norske matematikeren Sophus Lie har gitt sentrale bidrag ([13], [1], [17]). Derimot skal vi, med utgangspunkt i dimensjonsanalysen, illustrere metoden på et eksempel fra varmeledning. Idéen til dette avsnittet kommer fra Fowkes&Mahoney (1994).

Betrakt to uendelige materialer med ulik, men konstant temperatur som bringes i kontakt ved tiden  $t = 0$ , som vist på figur 30. Vi antar at varme transporteres uten problemer gjennom berøringsflaten, og vi regner éndimensjonal varmeledning. Problemet er å bestemme temperaturutviklingen i materialene etter hvert som tiden går. Siden vi antar uendelig utstrekning, og vi betrakter tiden fra 0 til  $\infty$ , finnes det ingen lengde- eller tidsskala. I praksis vil jo materialene naturligvis ha endelig utstrekning,  $L$ , og etter en tid  $T$  har temperaturen på endene økt med f.eks. 1% av differensen  $T_2 - T_1$ . Så lenge vi ser på tider som er vesentlig mindre enn  $T$ , bør vi kunne bruke løsningen for uendelig utstrekning også i dette tilfellet.

Varmetransport og lagring i et materiale er (i sin enkleste form) bestemt av tre materialkonstanter: *massetetthet*,  $\rho$ ,  $[\rho] = \text{kgm}^{-3}$ , *spesifikk varmekapasitet*,  $c$ ,  $[c] = \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ , og *varmeledningsevne*,  $k$ ,  $[k] = \text{Js}^{-1}\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

Vi innfører dimensjonsløs temperatur  $\tau$  ved å skrive

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\tau, \quad (273)$$

og helt generelt skulle da

$$\tau = \tau(x, t, \rho_1, c_1, k_1, \rho_2, c_2, k_2). \quad (274)$$

Hvis vi kjenner varmeledningsligningen, vet vi at  $\rho$ ,  $c$  og  $k$  inne i materialet kombinerer seg til en varmediffusjonskoeffisient  $\kappa = k/(c\rho)$ , mens varmeffluks generelt er  $-k\nabla T$ . Varmeffluks må

være kontinuerlig over berøringsflaten. Dette betyr at vi må kunne forenkle lign. 274 til

$$\tau = \tau(x, t, \kappa_1, \kappa_2, k_1, k_2). \quad (275)$$

Dimensjonsmatrisen for disse seks størrelsene har rang 3 (sjekk!), og vi har følgelig også tre dimensjonsløse kombinasjoner, for eksempel,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{x}{\sqrt{\kappa_1 t}}, \\ a &= \frac{k_1}{k_2}, \\ b &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \end{aligned} \quad (276)$$

Dermed har vi funnet at løsningen av problemet må kunne skrives på formen

$$\tau(x, t) = \tau_0(\eta, a, b) = \tau_0\left(\frac{x}{\sqrt{\kappa_1 t}}, \frac{k_1}{k_2}, \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right). \quad (277)$$

Løsningen avhenger som ventet av en kombinasjon av  $x$  og  $t$ , og allerede her gjør vi en morsom observasjon:

$$\tau(0, t) = \tau_0(0, a, b) = \text{konstant!} \quad (278)$$

Temperaturen på berøringsflaten er altså konstant for  $t > 0$ ! Dessverre kan ikke dimensjonsanalysen gi oss det eksakte uttrykket for  $\tau(0, t)$ , men uttrykket for  $\tau$  har redusert problemet fra en partiell til en ordinær diff.-ligning. Varmeledningsligningen i materiale 1 har formen

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}, \quad (279)$$

og ved å benytte at  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{d\tau_0}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$  osv., finner vi

$$\frac{d^2 \tau_0}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{d\tau_0}{d\eta} = 0, \quad (280)$$

og tilsvarende i materiale 2,

$$\frac{d^2 \tau_0}{d\eta^2} + \frac{1}{2} b \eta \frac{d\tau_0}{d\eta} = 0. \quad (281)$$

Ligning 281 har generell løsning

$$\tau_0 = A_2 + B_2 \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{b}}{2} \eta\right), \quad (282)$$

mens vi for materiale 1 får

$$\tau_0 = A_1 + B_1 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \eta\right). \quad (283)$$

Vi får fire integrasjonskonstanter å bestemme, men siden  $\tau_0(\eta) \rightarrow 0$  når  $\eta \rightarrow -\infty$ , og  $\tau_0(\eta) \rightarrow 1$  når  $\eta \rightarrow \infty$ , kvitter vi oss med to av dem:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= A \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \eta\right)\right), \quad \eta < 0, \\ \tau_0 &= 1 + B \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{b}}{2} \eta\right) - 1\right), \quad \eta > 0. \end{aligned} \quad (284)$$

	$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]	$c$ [J/kgK]	$k$ [W/mK]	$T$ [°C]	$w$ [m <sup>2</sup> Ks <sup>-5</sup> ]
Fot	1000	4000	0.6	37	1550
Glødende kull	150	800	0.04	600	70

**Tabell 2:** Tilnærmede verdier på tetthet, spesifikk varme og varmeledningskoeffisient for en menneskefot og glødende kull

Løsningen vi finner forutsetter at  $t > 0$ , og da er  $\tau_0$  kontinuerlig i  $\eta = 0$ . Dette gir

$$A = 1 - B. \quad (285)$$

Tilslutt benytter vi at også fluksen må være kontinuerlig på kontaktflaten,

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{0-} = k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{0+}. \quad (286)$$

Etter å ha ført inn  $\tau$  og  $\eta$ , gir dette

$$a \frac{d\tau_0}{d\eta} \Big|_{0-} = \frac{d\tau_0}{d\eta} \Big|_{0+}, \quad (287)$$

med andre ord

$$aA \frac{1}{2} = B \frac{\sqrt{b}}{2}, \quad (288)$$

eller

$$A = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + a}, \quad B = \frac{a}{\sqrt{b} + a}. \quad (289)$$

Vi får et overraskende enkelt uttrykk for temperaturen på grenseflaten:

$$T(0, t) = T_1 + (T_2 - T_1) A = \frac{T_1 w_1 + T_2 w_2}{w_1 + w_2}, \quad w_i = \sqrt{\rho_i c_i k_i}. \quad (290)$$

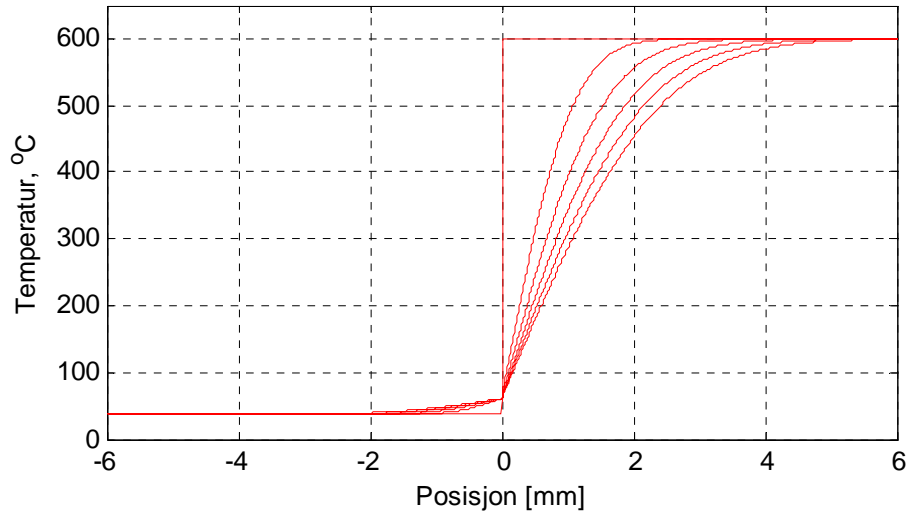
Nå kunne vi stoppet her, men uttrykket forklarer oss hvorfor det på vinteren føles mye kaldere å berøre et stykke metall enn et stykke tre. Fingeren vil ha temperatur  $T_f$  og en viss  $w_f$ . Selv om treet og metallet har samme temperatur  $T_0$ , vil  $w_{tre} < w_f$ , mens  $w_f \ll w_{metall}$ . Dette betyr at  $T(0, t) \approx T_f$  når vi berører treet, mens  $T(0, t) \approx T_0$  når vi berører metallet.

Dette kan faktisk trekkes enda lenger. Etter noe literatursøk har forfatteren kommet opp med verdiene i Tabell 2.

Disse verdiene gir en kontakttemperatur mellom *fot* og *glødende kull* på

$$T_k = \frac{37^\circ\text{C} \times 1550 + 600^\circ\text{C} \times 70}{1550 + 70} \approx 62^\circ\text{C}. \quad (291)$$

Slett ikke avskrekkende! En slik forklaring på hvordan det er mulig å gå på glødende kull avvises naturligvis av en kompakt majoritet på *Internett*. For mange år siden besøkte en svensk fysikkprofessor NTNU og lot studentene få prøve seg. Han ventet til de øverste kullene var utbrent slik at de skjermet for strålingsvarmen, som vi heller ikke har tatt med her, og så vidt jeg vet, var det ingen som tok skade av det.



**Figur 31:** Temperaturforløp for en situasjonen med fot til venstre og glødende kull til høyre vist for 0(1)5 sekunder. Merk at både temperaturen og fluksen er kontinuerlige for  $x = 0$  når  $t > 0$ .

Tilslutt kan en filosofere over hvor lenge en kan stole på similaritetsløsningen i dette tilfellet, og hvis vi regner at overhuden på fotsålen har tykkelse  $L = 0.5\text{mm}$ , kan en anslå tiden ved å sette  $\eta = 1$ , eller

$$t = \frac{L^2}{\kappa} = \frac{(10^{-3}/2)^2 \times 1000 \times 4000}{0.6} \text{s} = 1.7\text{s}. \quad (292)$$

Det er altså ikke verdt å stoppe underveis.

Temperaturforløpet for dette spesielle eksemplet er vist for 0(1)5 sekunder på figur 31. Som en ser, er overslaget vårt realistisk, men temperaturøkningen har bare gått mindre enn 2mm inn i foten selv etter 5 sekunder.

## 5.6 Ikke-lineær diffusjon

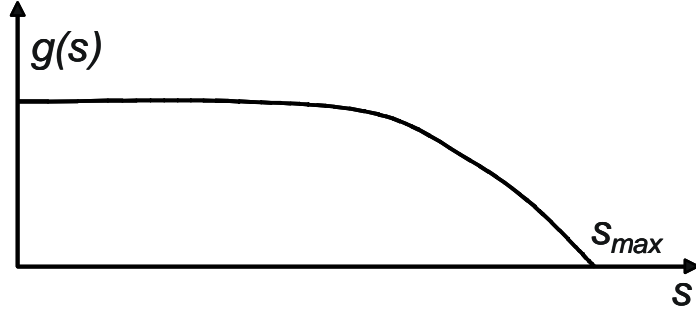
Mens modeller som leder til lineære diffusjonsligninger er relativt enkle å analyse, dukker det opp nye og uventede ting når diffusjonskoeffisienten avhenger av den uavhengige variable og ligningen blir ikke-lineær.

Gass som strømmer isotermisk i et porøst medium er et enkelt eksempel som leder til en ikke-lineær diffusjonsligning. Et porøst medium, for eksempel sandstein, har små porer som gassen kan strømme i. *Porøsitet*,  $\phi$ , er volumfraksjonen av porer slik at  $0 < \phi < 1$ . *Darcy's lov* sier at volumstrømmen ( $\text{m}^3/(\text{m}^2\text{s})$ ) er gitt av

$$\mathbf{q} = -\frac{K}{\mu} \nabla p \quad (293)$$

der  $K$  er en proporsjonalitetskonstant som kalles *permeabilitet*,  $\mu$  er viskositeten og  $p$  er trykket. Vi skal anta at tilstandsligningen for gassen har formen  $p = a\rho^\gamma$  ( $\gamma > 0$ ). Bevarelsesloven for gassen får da formen

$$\frac{d}{dt} \int_R \phi \rho dV + \int_{\partial R} \rho \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad (294)$$



**Figur 32:** Skisse av løsningen for  $\kappa(\rho) = \rho$ .

som gir oss differensialformuleringen

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0. \quad (295)$$

Hvis vi fører inn tilstandsligningen i uttrykket for  $\mathbf{q}$ , får vi

$$\mathbf{q} = -\frac{K}{\mu} \nabla p = -\frac{Ka\gamma}{\mu} \rho^{\gamma-1} \nabla \rho, \quad (296)$$

og dermed

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{Ka\gamma}{\mu\phi} \rho^\gamma \nabla \rho \right). \quad (297)$$

Som vi ser, har vi fått en diffusjonsligning med en diffusjonskoeffisient som er proporsjonal med  $\rho^\gamma$ . Spesielt ser vi at diffusjonskoeffisienten går ned til 0 når tettheten går mot 0 ( $\gamma$  var større enn 0). Det finnes en god del teori for slike ikke-lineære diffusjonsligninger selv om en naturligvis ikke lenger kan bruke superposisjonsprinsippet.

Også for slike ligninger finnes det similaritetsløsninger. For ligninger som

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (298)$$

kan en se på løsninger av formen  $\rho(x, t) = g(s)$ ,  $s = x/t^{1/2}$ . Hvis vi setter dette inn, får vi en ordinær ligning for  $g$ :

$$\kappa(g)g'' + \kappa'(g)g'^2 + \frac{s}{2}g' = 0. \quad (299)$$

For  $\kappa(g) = 1$  reduseres ligningen til  $g'' + sg'/2 = 0$  med løsningen

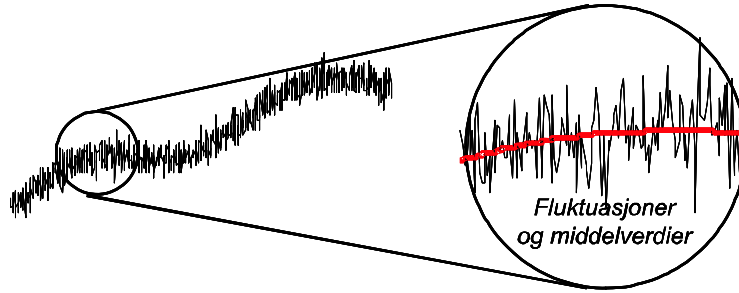
$$g(s) = A \int_{-\infty}^s e^{-\xi^2/4} d\xi + B. \quad (300)$$

Hvis  $\kappa(\rho) = \rho$  vil vi få en løsning som ser ut som antydnet på figur 32. Denne løsningen går til 0 ved en endelig verdi av  $s$ , og derfor vil  $x_{\max} = s_{\max} \sqrt{t} \propto \sqrt{t}$ . For denne diffusjonsligningen skjer utbredelsen med endelig hastighet! Se [4] for en nærmere analyse for en nærmere analyse av dette.

En annen morsom klasse løsninger er de såkalte *Barenblatt-løsningene* som gjelder når  $\kappa = \kappa_0 (\rho/\rho_0)^m$ :

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left( \frac{t_0}{t} \right)^{1/(m+2)} \left( 1 - \left( \frac{x}{x_1} \right)^2 \right)^{1/m}, \quad t > 0, \quad |x| \leq x_1 = x_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/(m+2)} \quad (301)$$





**Figur 33:** Et observert signal som består av raske fluktuasjoner og en mer langsomt varierende middelverdi.

( $t_0$  og  $x_0$  kan uttrykkes ved hjelp av  $\kappa_0$  og  $Q = \int_{x=-\infty}^{\infty} c(x, 0) dx$ ). For  $m > 0$  har løsningene en endelig utstrekning for en gitt  $t$ . Også for disse ligningene finnes det teoremer som sier at løsninger med vilkårlig, men lokaliserte startbetingelser nærmer seg Barenblatt-løsningene når tiden vokser (I følge Prof. Peter Lindqvist, NTNU). Barenblatt-løsningene er beskrevet i [8], men ikke i [1].

## 6 MODELLERING AV TURBULENS

Teorien for turbulens er et godt eksempel på hvordan en kan gjøre seg bruk av en *stokastisk betraktningssmåte* i matematisk modellering: En oppgir å beskrive fenomenet en betrakter deterministisk lenger enn ned til et visst nivå, og sier at raskere variasjoner er *stokastiske*. Vi gir opp å modellere fenomenet i all detalj, og forsøker i stedet å modellere utviklingen av middelverdiene, se fig. 33.

Vi skal illustrere denne teknikken ved å vise hvordan en utleder ligningene for turbulens i det aller enkleste tilfellet, nemlig for *inkompressibel, viskøs væske uten påvirkning av ytre krefter*.

For å utlede ligningene trenger vi kontinuitetsligningen og Navier-Stokes ligning som vi fant i avsnitt 4. Vi starter med følgende fire differensialligninger

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (302)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \cdot ((\mathbf{v})\mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (303)$$

I turbulenteori oppgir en å løse ligningene 302 og 303. Hastigheten og trykket oppfattes derimot som stokastiske variable og skrives

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= E(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - E(\mathbf{v})), \\ p &= E(p) + (p - E(p)). \end{aligned} \quad (304)$$

Forventningsverdiene varierer over rom og tidsskalaer gitt av dimensjonene på fenomenet vi betrakter. Dette kalles de *makroskopiske skalaene*. ”Småskalavariasjonene”, ”de raske variasjonene”, eller *fluktuasjonene* foregår på de *mikroskopiske skalaene*. I turbulenteorien antar en at disse skalaene virkelig er vel separerte, men i noen situasjoner har en etterhvert blitt klar over at så ikke behøver å være tilfelle.

Dessverre er praksis i turbulenteori omvendt av det som brukes i statistikk og sannsynlighetsteori: Deterministiske variable betegnes med store bokstaver og stokastiske variable med små.

For ikke å forvirre lesere med bakgrunn i mekanikk skal vi også holde oss til denne praksisen. Dermed betegner vi  $E(\mathbf{v})$  med  $\mathbf{V}$  og (for å forvirre ytterligere)  $\mathbf{v} - E(\mathbf{v})$  med  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &:= \mathbf{V} + \mathbf{v}, \\ p &:= P + p\end{aligned}\tag{305}$$

Her er altså  $\mathbf{V}$  og  $P$  deterministiske funksjoner av de makroskopiske variable  $\mathbf{x}$  og  $t$ , mens  $\mathbf{v}$  og  $p$  er stokastiske variable med forventning 0,  $E(\mathbf{v}) = 0$ ,  $E(p) = 0$ . Ofte vil en anta at  $\mathbf{v}$  og  $p$  er Gaussiske variable, og generelt vil parametrene i *sannsynlighetsfordelingene* for  $\mathbf{v}$  og  $p$  være avhengig av  $\mathbf{x}$  og  $t$ .

La oss nå føre ligning (305) inn i lign. 302 og anvende forventningsoperatoreren, som vi antar kommuterer med derivasjon:

$$0 = E(\nabla \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v})) = \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot E\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{V}.\tag{306}$$

Dermed ser vi at også  $\mathbf{V}$  tilfredsstiller ligningen

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.\tag{307}$$

(og følgelig vil til og med  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ).

Hvis (303) behandles på samme måte, får vi for komponent “ $j$ ”

$$\rho \left( \frac{\partial V_j}{\partial t} + \nabla \cdot (V_j \mathbf{V}) + \nabla \cdot E(v_j \mathbf{v}) \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \nabla \cdot (\mu \nabla V_j).\tag{308}$$

Det er vanlig å føre inn *tensoren*  $\mathbf{T} = -\rho E(\mathbf{v}\mathbf{v}')$ , det vil si  $T_{ij} = -\rho E(v_i v_j)$ . Denne tensoren kalles *Reynolds-spenningene*. Impulsligningen for de makroskopiske variablene blir da

$$\rho(\mathbf{V}_t + \nabla \cdot ((\mathbf{V})\mathbf{V})) = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{V} + \mathbf{T}).\tag{309}$$

Ligning (309) adskiller seg fra ligning (307) ved at vi har fått med et ekstra kraftledd,  $\nabla \cdot \mathbf{T}$ , mens (307) er essensielt den samme som ligning (302).

Ved å trekke (309) fra (303) innsatt  $\mathbf{V} + \mathbf{v}$  etc., får vi en ligning for  $\mathbf{v}$ . Hvis vi deretter tar skalarproduktet med  $\mathbf{v}$  og anvender forventningsverdien, får vi en transportligning for *turbulent energi pr. volumenhet*,

$$e = \rho \frac{1}{2} E(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}).\tag{310}$$

Det fundamentale spørsmålet er nå hvordan en skal modellere Reynolds-spenningene ved hjelp av makroskopiske størrelser. Det er dette som er hovedproblemet i turbulenteori. Den eldste modellen ble framsatt av Boussinesq allerede i 1877. Han definerte  $\mathbf{T}$  som en funksjon av  $\partial V_i / \partial x_j$  på samme måte som spenningstensoren relateres til  $\partial V_i / \partial x_j$  for en Newtonsk væske. Dermed kan vi skrive ligning (309) som

$$\rho(\mathbf{V}_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot ((\mu + \mu_T) \nabla \mathbf{V}),\tag{311}$$

og bevarelseslovene for masse og impuls får nøyaktig samme form som før. Konstanten  $\mu_T$  med dimensjon viskositet representerer altså et *tilsynelatende tillegg* i viskositeten på grunn av turbulens. På engelsk kalles  $\mu_T$  *eddy viscosity*. Det har vist seg at modellen stemmer bra for fri turbulent strøm der  $\mu_T$  kan være 10–1000 ganger større enn  $\mu$ . At den også er enkel å regne med, har ført til

at den ofte brukes som en justeringsfaktor i numeriske modeller. Mer avanserte modeller relaterer  $\mu_T$  til lokal turbulent energi.

Hvis væsken inneholder et stoff som blandes ved væsken ved hjelp av diffusjon, vil vi i tillegg til (302) og (303) ha en konveksjons/diffusjonslikning for konsentrasjonen  $c$  av stoffet ("stoffet" kan godt være varmeinnholdet):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\kappa \nabla c). \quad (312)$$

Her er  $\kappa$  den tilhørende diffusjonskoeffisienten.

På samme måte som for  $\mathbf{V}$  og  $P$  kan vi skrive konsentrasjonen  $Ec + (c - Ec) := C + c$ . Hvis dette føres inn i ligningen, får vi

$$\frac{\partial(C + c)}{\partial t} + (\mathbf{V} + \mathbf{v}) \cdot \nabla(C + c) = \nabla \cdot (\kappa \nabla(C + c)). \quad (313)$$

Når vi deretter anvender forventningsoperatoren og anvender at  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , får vi

$$E(\mathbf{v} \cdot \nabla c) = E(\nabla \cdot (\mathbf{v}c)) - E(c \nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot E(\mathbf{v}c), \quad (314)$$

og

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = \nabla \cdot (\kappa \nabla C - E(\mathbf{v}c)). \quad (315)$$

Vektoren  $\mathbf{q}_T = E(\mathbf{v}c)$  kalles *turbulent fluks*. Akkurat som for Reynoldsspenningene er det vanskelig å relatere denne fluksen til makroskopiske størrelser. Det enkleste er naturligvis igjen å anta at  $\mathbf{q}_T = -\kappa_T \nabla C$ , da dette gir samme likning som før med en ny diffusjonskonstant  $\kappa + \kappa_T$ .

## 7 SKALERING I GEOFYSIKK

Vi minner om at det å *skalere* en variabel  $u^*$  ville si å skrive variabelen som  $Uu$  der  $U$  er av samme størrelsesorden som  $u^*$ , og  $u$  er av størrelsesorden 1. Skalaene er de naturlige målestokkene i og med at uavhengige og avhengige variable verken blir spesielt store eller spesielt små etter at de er skalert. Som et resultat av skaleringen ender vi opp med en del dimensjonsløse parametre som har mer eller mindre åpenbar fysisk tolkning. Karakteren til ligningene, både analytisk og ikke minst numerisk, avhenger av størrelsen på disse parametrene. Spesielt er dette viktig å være klar over når en skal løse ligningen numerisk, der små parametre foran de høyeste deriverte alltid skaper problemer. I dette kapitlet skal vi se noen eksempler på hvordan en kan skalere ligningene i geofysisk fluiddynamikk.

### 7.1 Skalering av Navier-Stokes ligninger

Navier-Stokes ligninger, det vil si impulsbevarelsesloven på differensialform, er sentral i all fluidmekanikk. Strømning av vann forekommer på skalaer som spenner fra verdenshavene, via sjøer, elver, vannkraftteknologi og kjemisk/teknisk industri, skip og offshore og ned til mikroskopisk biologisk strømning. I fluidmekanikk, oseanografi, meteorologi og annen geofysikk vil en derfor finne en rekke eksempler, noen temmelig utspekulerte, på skalering av Navier-Stokes ligning.

La oss betrakte Navier-Stokes ligning på en relativt generell form, nemlig en Newtonsk væske med konstant viskositet,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot ((\rho \mathbf{v}) \mathbf{v}) = \rho (\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) - \nabla p + \mu \left( \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right). \quad (316)$$

Her ser vi på en situasjon der fenomenet vi betrakter følger jordrotasjonen, slik at massekreftene består av tyngdekraften representert ved  $g$ -vektoren  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  (justert for sentripetal-akselerasjonen) og Corioliskraften med  $|\boldsymbol{\Omega}| = 2\pi/24\text{timer} = 7.3 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$ . Vi legger merke til at alle ledd i ligningen har dimensjonen *kraft/volumenhet*.

*Nedenfor tillater vi oss å bruke samme betegnelser på variablene før og etter skaleringen for ikke å skape en kludrete notasjon.*

Helt enkelt kan vi først se på en situasjon med bare én *lengdeskala*  $L$  og en *hastighetskala* som vi kaller  $U$ . Videre har vi en *referansetetthet*,  $\rho_0$ , og en *trykkskala*  $P$  som betegner typisk avvik fra en referanseverdi, for eksempel atmosfæretrykket (et konstant trykk-bidrag kommer ikke direkte inn i ligningen som kun inneholder  $\nabla p$ ). Hvis vi nå skalerer ligningen ved å føre inn

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &:= L\mathbf{x}, \\ \mathbf{v} &:= U\mathbf{v}, \\ t &:= (L/U)t, \\ \rho &:= \rho_0\rho, \\ p &:= p_{ref.} + Pp, \end{aligned} \tag{317}$$

og i tillegg skriver  $\mathbf{g} = g\hat{\mathbf{g}}$  og  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ , får vi etter divisjon med  $\rho_0 U^2/L$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v} + \nabla \cdot ((\rho\mathbf{v})\mathbf{v}) = \frac{Lg}{U^2}\rho\hat{\mathbf{g}} + \frac{2\Omega L}{U} \left( -2\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{v} \right) - \frac{P}{\rho_0 U^2} \nabla p + \frac{\mu/\rho_0}{LU} \left( \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right). \tag{318}$$

Begge leddene på venstre side er  $O(1)$ . På høyre side har vi endt opp med *fire dimensjonsløse kombinasjoner* som alle har en relativt enkel fysisk tolkning:

$Lg/U^2$ :

*Fritt fall-hastigheten* over en distanse  $L$  er gitt ved  $\sqrt{2gL}$ . Hvis vi opererer med hastigheter  $U$  som er vesentlig større, kan vi anta at tyngdekraften ikke er spesielt viktig for problemet vårt.

$U/2\Omega L$ :

Denne kombinasjonen kalles i geofysikk *Rosby-tallet* (etter svensken *Carl-Gustaf Rossby*, 1898–1957, som ga mange bidrag til teorien for geofysisk strømming). I et problem der  $U = O(1\text{m/s})$  og  $L = O(1\text{m})$ , ser vi at det inverse Rosby-tallet er omlag  $10^{-4}$ , slik at Corioliskrefter vil være neglisjerbare. For et lavtrykk der  $L = O(10^6\text{m})$  og  $U = O(10\text{m/s})$  er derimot den tilsvarende faktoren 14!

$P/(\rho_0 U^2)$ :

Dette forholdet kan gis litt ulik tolkning, men hvis vi kjenner Bernoullis ligning, nemlig at  $P/\rho_0 + U^2/2 + gz$  er konstant, ser vi at faktoren essensielt er forholdet mellom de to første bidragene, og at en derfor kan skrive

$$\frac{P}{\rho_0 U^2} = \frac{1}{2} \frac{P/(\rho_0 g)}{U^2/(2g)} = \frac{1}{2} \frac{h_p}{h_v} \tag{319}$$

Høydene  $h_p$  og  $h_v$  kalles *trykk-* og *hastighetshøyer*. Trykkforskjeller blir altså neglisjerbare hvis hastigheten er tilstrekkelig stor.

$LU/(\mu/\rho_0)$ :

Dette er en gammel kjenning, nemlig *Reynolds tall*,  $Re$ . Legg merke til at det er det *inverse* av Reynolds tall som står i ligningen.

I nesten alle situasjoner der vi har med vann eller luft å gjøre, og der størrelsesskalaen og hastighetsskalaen ikke er helt mikroskopiske, vil  $Re \gg 1$ . Da vil ligningen ovenfor få en liten parameter ( $1/Re$ ) foran de høyeste deriverte. Etter det vi allerede vet om *singulær perturbasjon*, kan en forvente problemer. Dette er da også nettopp hva som observeres: Løsningen utvikler seg etter kort tid på en kaotisk og upredikterbar måte, – vi får *turbulens*.

La oss som et mer konkret eksempel se på Nordsjøen der forurensninger transporteres rundt på grunn av strømmen. Det er derfor lagt ned stor innsats i å beregne strømbildet i Nordsjøen. Strøm er gjerne sammensatt av tidevannsstrøm, strøm generert av bevegelige lavtrykk, vinddrevet strøm og randbetingelser fra de store sirkulasjonssystemene, i dette tilfellet Golfstrømmen. Hvis vi går ut fra tidevannet, har dette en hovedperiode på 12.4 timer, altså endrer tidevannsstrømmen seg over et tidsrom  $O(3\text{timer})$ . La oss si at vi vil studere strømmen over et slikt tidsrom, som følgelig gir oss en tidsskala,  $T$ . Hastigheten på strømmen i Nordsjøen er typisk i området  $0 - .5\text{m/s}$  (midt i Nordsjøen er det nesten ikke tidevann) som gir oss en hastighetsskala  $U$ . I løpet av en tid  $T$  beveger vannet seg derfor en strekning  $D = TU$ . Dette blir en *annen* lengdeskala enn total horisontal utstrekning  $L$  siden

$$D = TU = 10000\text{s} \times .5\text{m/s} = 5 \cdot 10^3\text{m} \ll 10^6\text{m} = L. \quad (320)$$

Hvis vi fører inn dette i leddene på venstre side av Navier-Stokes, får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} &= \rho_0 O\left(\frac{U}{D}\right) O(U) = \rho_0 O\left(\frac{U^2}{D}\right), \\ \nabla \cdot ((\rho \mathbf{v}) \mathbf{v}) &= \rho_0 O\left(\frac{1}{L}\right) O(U^2) = \rho_0 O\left(\frac{U^2}{D}\right) O\left(\frac{D}{L}\right). \end{aligned} \quad (321)$$

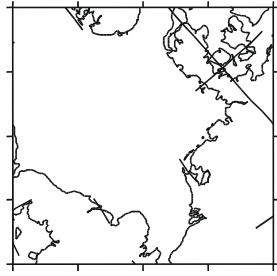
Med denne skaleringen blir altså det såkalte advektive (ikke-lineære) leddet mye mindre enn første ledd. Dette er velkjent innen numerisk havstrøm-modellering der de ofte sløyfer det ikke-lineære leddet. Så lenge en kjører modeller av ”store” områder slik at lengden vannet beveger seg er liten i forhold til utstrekningen av modellen, kan dette forsvares.

La oss gå et stykke videre og se spesielt på skaleringen i *horisontalretningene*. I de horisontale gradientene vil  $L$  være den naturlige lengde-skalaen. Tettheten vil være omlag konstant, men selv små varisjoner i tettheten kan være viktig siden dette gir opphav til tetthetsdrevet strøm. Typiske variasjoner av trykket (når vi går opp og ned i vannet) vil være av størrelsesorden  $\rho g H$ , der  $H$  er typisk dybde (100m for Nordsjøen). Hvis dette nå føres inn i ligningen, og vi bruker ” $h$ ” som indeks for den horisontale delen, får vi

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v}_h + \frac{D}{L} \nabla \cdot ((\rho \mathbf{v}_h) \mathbf{v}) = \frac{2\Omega D}{U} \left( -2\hat{\Omega} \times \mathbf{v} \right)_h - \frac{gHD}{U^2 L} \nabla_{hp} + \frac{D\mu/\rho_0}{L^2 U} \nabla^2 \mathbf{v}_h. \quad (322)$$

Ved å sette inn typiske verdier for de dimensjonsløse kombinasjonene, får vi

$$\begin{aligned} \frac{D}{L} &\approx \frac{5 \cdot 10^3}{10^6} = 5 \cdot 10^{-3}, \\ \frac{2\Omega D}{U} &\approx \frac{15 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-1}} \approx 1, \\ \frac{gHD}{LU^2} &\approx \frac{10 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^3}{10^6 \cdot (5 \cdot 10^{-1})^2} \approx 10, \\ \frac{D\mu/\rho_0}{L^2 U} &\approx \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5}}{10^{12} \cdot 5 \cdot 10^{-1}} = 10^{-13} \end{aligned} \quad (323)$$



**Figur 34:** Nordsjøen sett ovenfra og fra siden (!)

Som vi ser, er det en *enorm* forskjell i størrelse på leddene. Vi forventer at det advektive leddet er ubetydelig, mens trykkforskjeller og Corioliskrefter er av betydning. Siste ledd er tilsynelatende helt neglisjerbart, men det som dette forteller oss er at *molekylær* viskositet er uten direkte betydning. For en numeriker vil det dessuten være klart at vi aldri noensinne kan håpe på å løse dette problemet numerisk direkte slik det står. Strømningen er nemlig turbulent, og dette krever en egen turbulensmodell, for eksempel ved hjelp av *turbulent viskositet*. Å bestemme denne viskositeten, som vanligvis også vil være forskjellig horisontalt og vertikalt, er et høyst aktuelt forskningstema. I tillegg vil strømningen være påvirket av krefter som virker gjennom grensesjikt ved bunnen og overflaten (se nedenfor).

## 7.2 Reduksjon av dimensjon

I mange situasjoner har fenomenet vi betrakter forskjellig lengdeskala i forskjellige retninger. Hvis vi går tilbake til Nordsjøen og sammenligner dybdeskalaen,  $H = 100\text{m}$ , med utstrekningen,  $L = 10^6\text{m}$ , er det klart at vi har et *meget "tynt" problem*:

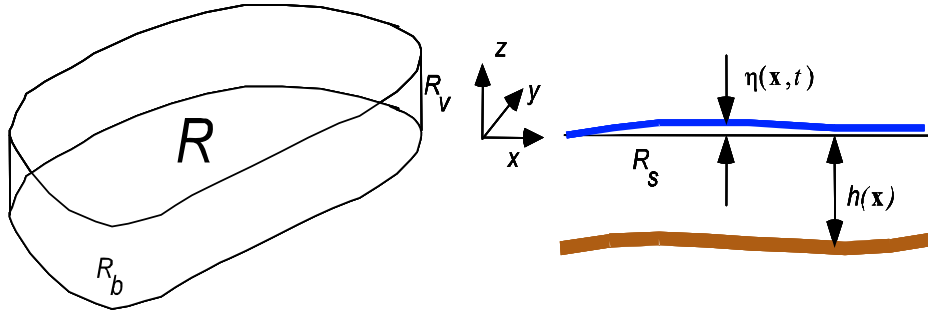
$$\frac{H}{L} = 10^{-4} \quad (324)$$

Det er nærliggende å tro at det må være mulig å modellere det som skjer på de gjenværende skalaene etter å ha "midlet bort" det som skjer på den "tynne" skalaen. Dette er idéen for modeller i en rekke situasjoner, for eksempel varmestrøm i plater, olje og vannstrømning i tynne porøse sjikt, strømning i grunne kanaler, elver og sjøer, modellering av oljesmurte lagre og ikke minst storskala modellering av atmosfære og hav.

Vi skal (noe overfladisk) illustrere teknikken ved å utlede såkalte *vertikalt midlede ligninger* for strømmen i Nordsjøen. Det er flere måter å gå fram på, men vi skal benytte en utledning som baserer seg direkte på bevarelseslovene.

Vi tenker oss et koordinatsystem der  $\mathbf{x} = (x, y)$  og  $z$  er vertikal (Det er enkelt å generalisere dette til en *krum* jordoverflate). Det er vanlig å la origo ligge i middelvannstanden hvorfra vi definerer *dybden*,  $h = h(\mathbf{x})$ , og *overflatens posisjon*,  $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$ . La  $R$  være et kontrollvolum med vertikale vegger som vi betegner med  $R_v$ . La projeksjonen av  $R$  ned i  $(x, y)$ -planet være  $R_s$  og bunnflata (havbunnen)  $R_b$ , se figur 35.

Vi vil for enkelthets skyld si at tettheten er konstant og at vannet er inkompressibelt. Vi ønsker å redusere ligningene våre til ligninger i overflatehevningen,  $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$  og en horisontal middelhastighet  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$  som er funksjoner av  $\mathbf{x} = (x, y)$  og  $t$ . For en slik modell ligger det en forutsetning om at skalaen for horisontale variasjoner i dybde og overflatehevning er store i forhold



**Figur 35:** Kontrollvolum og definisjoner.

til dybden. Dette er rimelig bra oppfylt for Nordsjøen. Strømningen er derfor i det vesentligste horisontal. Vi lar også her indeks “ $h$ ” betegne den horisontale delen av vektorer og  $\nabla$ -operatoren.

La oss starte med massebevarelsesloven som med *konstant tetthet* (og uten kilder eller sluk) sier at

$$\frac{d}{dt} \int_R dV + \int_{\partial R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (325)$$

Første ledd gir oss umiddelbart

$$\int_R dV = \int_{R_s} dx dy \int_{z=-h(\mathbf{x})}^{\eta(\mathbf{x},t)} dz = \int_{R_s} (\eta(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x})) dx dy. \quad (326)$$

I andre ledd får vi bare et integral over  $R_v$  siden havbunnen er tett:

$$\int_{\partial R} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{R_v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial R_s} ds \int_{z=-h(\mathbf{x})}^{\eta(\mathbf{x},t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dz. \quad (327)$$

I siste integralet forekommer et integral over hastigheten i vertikalretning, og vi definerer *den horisontale middelhastigheten* ved

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\eta(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x})} \int_{z=-h(\mathbf{x})}^{\eta(\mathbf{x},t)} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}, z, t) dz. \quad (328)$$

(Siden  $\mathbf{n}$  er horisontal, er det naturligvis nok bare å ta med horisontalkomponenten av  $\mathbf{v}$ ). Dermed ender vi opp med en “todimensjonal” massebevarelse på integralform:

$$\frac{d}{dt} \int_{R_s} (\eta(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x})) dx dy + \int_{\partial R_s} (\eta(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x})) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (329)$$

Her kan vi som før anvende divergensteoremet som gir oss differensialformen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \cdot ((\eta + h)\mathbf{V}) = 0. \quad (330)$$

Impulsbevarelsen blir dessverre ikke like enkel:

$$\frac{d}{dt} \int_R \mathbf{v} dV + \int_{\partial R} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \frac{1}{\rho} \Sigma \mathbf{F}. \quad (331)$$

Første ledd byr ikke på problemer, men i andre ledd forekommer  $\mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ , og en kan jo ikke uten videre erstatte middelveien av et produkt med et produkt av middelveiene. Det er ingen enkel vei ut av dette. Nå kan vi alltid skrive horisontalkomponenten av  $\mathbf{v}$  som  $\mathbf{v}_h = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$ , der i følge definisjonen på  $\mathbf{V}$ ,

$$\int_{z=-h}^{\eta} \mathbf{v}' dz = 0. \quad (332)$$

Hvis dette føres inn, får vi

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \mathbf{v}_h (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \int_{R_v} \mathbf{v}_h (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial R_s} ds \int_{z=-h}^{\eta} \mathbf{v}_h (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}) dz = \\ &= \int_{\partial R_s} ds \int_{z=-h}^{\eta} (\mathbf{V} + \mathbf{v}') ((\mathbf{V} + \mathbf{v}') \cdot \mathbf{n}) dz \\ &= \int_{\partial R_s} (\eta + h) \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\partial R_s} \left( \int_{z=-h}^{\eta} \mathbf{v}' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}) dz \right) ds. \end{aligned} \quad (333)$$

I praksis vil en kunne neglisjere det siste leddet ut fra argumenter som at det ikke-lineære adveksjonsleddet er lite i utgangspunktet (i alle fall for Nordsjøen).

En vet også, fra turbulensteori for strømning langs en flate, at (middel)hastigheten stort sett er konstant bortsett fra et tynt (i forhold til dybden) grensesjikt nær bunnen. For en slik hastighetsprofil er siste ledd mye mindre enn det første. Endelig kan en, ut fra Schwarz' ulikhet, se at leddet er neglisjerbart dersom standardavviket av  $\mathbf{v}$  rundt  $\mathbf{V}$  er lite i forhold til  $\mathbf{V}$ .

På høyre side av bevarelsesloven inngår de ytre kreftene. Hvis vi starter med trykkbidraget, kan vi i vår situasjon ut fra forutsetningene og impulsbevarelsesloven i vertikalretning med god nøyaktighet bruke det *hydrostatiske trykket*,  $p/\rho = g(\eta - z) + p_0/\rho$ . Her kan en godt tenke seg at atmosfæretrykket  $p_0$  varierer, og dette vil kunne ha betydning for strømbildet, men vi antar at det er konstant. Det totale *horisontale* trykkbidraget på  $R$  blir følgelig

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_h &= - \int_{\partial R} (g(\eta - z) + p_0/\rho) \mathbf{n}_h d\sigma = -g \int_{R_v \cup R_b} (\eta - z) \mathbf{n}_h d\sigma = \\ &= -g \int_{\partial R_s} \frac{(h + \eta)^2}{2} \mathbf{n} ds - g \int_{R_b} (\eta + h) \mathbf{n}_h d\sigma \\ &= -g \int_{R_s} (h + \eta) \nabla_h (h + \eta) dx dy + g \int_{R_s} (\eta + h) \nabla_h h dx dy \\ &= -g \int_{R_s} (h + \eta) \nabla_h \eta dx dy. \end{aligned} \quad (334)$$



Legg merke til bruken av divergensteoremet og omregningen fra flateintegral over bunnflata til et integral over  $R_s$ .

Corioliskraften er en volumkraft som både har horisontal- og vertikalkomponent. Hvis en integrerer over  $z$ -retning og antar at middelverdien av *hele*  $\mathbf{v}$ , i tråd med forutsetningene, er omlag middelverdien av den horisontale komponenten, så vil det horisontale Coriolisbidraget kunne skrives

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -2 \int_{R_s} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h (h + \eta) dx dy = \\ &= - \int_{R_s} (-fV_y, fV_x)(h + \eta) dx dy, \quad f = 2|\Omega| \sin(\text{breddegraden}) \end{aligned} \quad (335)$$

Det siste leddet skaper de største problemene. Strømningen vil være turbulent, men turbulensen er ikke nødvendigvis den samme ved bunnen som ved overflaten. Hvis vi bruker en modell med *eddy viskositet*, vil heller ikke horisontal- og vertikalverdiene være de samme. I praksis sier en ofte at turbulent viskositet leder til en horisontal *friksjonskraft* mot bunnen som pr. flateenhet (skjærspenning) har formen  $d\mathbf{F}/d\sigma = -C_{\text{Chezy}}\rho|\mathbf{V}|\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{F}_{\text{friksjon}} = - \int_{R_s} C_{\text{Chezy}}\rho|\mathbf{V}|\mathbf{V} dx dy. \quad (336)$$

Friksjonskoeffisienten, også kalt *Chezyfaktoren*, er en populær justeringsfaktor som har en tendens til å velges slik at de numeriske beregningene stemmer forbløffende bra med observasjonene (!). Strømmodeller av Nordsjøen inkluderer også ofte et *vindfelt* som drar på vannvassene.

Horisontale skjærkrefter modelleres gjerne med en horisontal *eddy viskositet*  $\mu_h$  sammen med de deriverte av  $\mathbf{V}$ . Dette gir oss en spenningstensor på den vanlige formen. Hvis vi nå på samme måte som før anvender divergensteoremet der det er nødvendig, ender vi opp med en differensialformulering av hele ligningen:

$$\frac{\partial(h + \eta)\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla_h \cdot ((h + \eta)(\mathbf{V})\mathbf{V}) = -g(h + \eta)\nabla_h \eta - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})_h (h + \eta) - C_{\text{Chezy}}\rho|\mathbf{V}|\mathbf{V} + \mu_h \nabla_h^2 \mathbf{V} \quad (337)$$

Sammen med massebevarelsen har vi fått *tre* ligninger for de to komponentene til  $\mathbf{V}$ , samt overflatehevningen  $\eta$ . I praksis vil  $|\eta| \ll h$  slik at det er mulig å forenkle ligningene ytterligere. Ellers er det også vanlig å bruke  $\bar{\mathbf{V}} = (h + \eta)\mathbf{V}$  som variable i stedet for  $\mathbf{V}$ .

## 8 APPENDIX: 1. ORDENS PARTIELLE DIFF.-LIGNINGER

Appendikset gir en kort innføring i løsning av *første ordens kvasi-lineære partielle diff.-ligninger* beregnet på lesere uten noen bakgrunn i partielle diff.-ligninger utover grunnkursene. Og hva betyr så disse ordene?

- *første orden* = bare deriverte opptil første orden inngår
- *kvasi-lineær* = ligningen er lineær i de førstederiverte
- *partiell* = løsningen er en funksjon av flere enn én uavhengig variabel

### 8.1 Ligninger og løsninger

Teorien nedenfor er illustrert for en variabel  $z$  som avhenger av to uavhengige variable,  $x$  og  $y$ , slik at  $z = z(x, y)$ . Ligninger med flere enn to uavhengige variable løses på tilsvarende måte.

Partielle diff.-ligninger deles inn i ulike klasser, og for at vi i det hele tatt kan tenke på å løse ligninger av klassen ovenfor, må de kunne bringes over på den såkalte *normalformen*. Dette betyr at vi må kunne skrive ligningen

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} - R(x, y, z) = 0, \quad (338)$$

der  $P$ ,  $Q$  og  $R$  bare er funksjoner av  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , og *ikke* inneholder noen deriverte. Her ser vi at  $\partial z/\partial x$  og  $\partial z/\partial y$  kun opptrer i første potens, mens det er ingen slik restriksjon på  $z$  som kan gå inn i funksjonene  $P$ ,  $Q$  og  $R$ . Grunnen til at vi velger et minustegn foran siste ledd blir klart etter hvert.

En løsning av ligning 338 er altså en funksjon

$$z = f(x, y) \quad (339)$$

som vi kan sette inn og tilfredsstille ligningen, dvs.

$$P(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + Q(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - R(x, y, f(x, y)) = 0. \quad (340)$$

Hvis vi tenker oss et vanlig koordinatsystem i  $\mathbb{R}^3$ , vil altså funksjonen  $z = f(x, y)$  definere ei *flate* i rommet som illustrert på figur 36.

Fra Matematikk 2 husker vi kanskje at vektoren

$$\mathbf{n} = \left[ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, -1 \right] \quad (341)$$

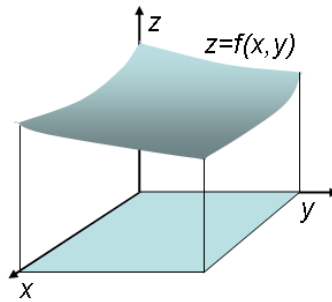
er en *normalvektor* til flata.

Kanskje husker vi også at en samling av tre funksjoner gitt på et område i  $\mathbb{R}^3$  definerer det vi kaller et *vektorfelt*,

$$\mathbf{V}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]. \quad (342)$$

*Strømlinjer* til vektorfeltet er romkurver

$$\mathbf{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)] \quad (343)$$



**Figur 36:** Løsningen til en 1. ordens partiell diff. ligning kan representeres som ei flate i rommet.

som tilfredsstiller det ordinære ligningssystemet

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{V}(x, y, z), \quad (344)$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= P(x, y, z), \\ \frac{dy}{ds} &= Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{ds} &= R(x, y, z). \end{aligned} \quad (345)$$

Generelt kan en tenke seg at en setter  $\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ , og løser ligning 344 for å finne strømlinje gjennom  $\mathbf{r}_0$ .

Ofte brukes den korte skrivemåten

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (346)$$

for ligningssystemet i 345. Dette betyr nøyaktig det samme.

Vi gjør nå en viktig observasjon:

*Normalvektorene til en løsning av ligning 338 står ortogonalt på strømlinjene til vektorfeltet  $\mathbf{V}$  definert i ligning 342.*

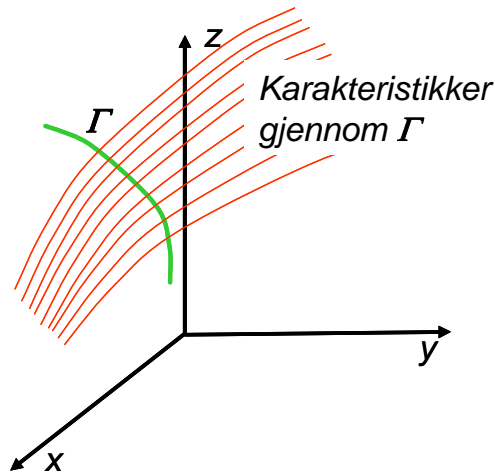
Dette er helt opplagt, siden

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = [P, Q, R] \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right] = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} - R = 0! \quad (347)$$

I teorien for partielle diff.-ligninger kalles strømlinjene for *karaktistikker*.

Det er denne viktige observasjonen som nå gjør oss i stand til å løse det såkalte Cauchyproblemet:

*Gitt en romkurve  $\Gamma$  i  $\mathbb{R}^3$ . Finn en funksjon  $z = f(x, y)$  som tilfredsstiller ligning 338 og som er slik at  $\Gamma$  ligger i flata definert av løsningen.*



**Figur 37:** Alle karakteristikkene gjennom  $\Gamma$  definerer en løsning av Cauchyproblemet.

Rent geometrisk er det ikke så vanskelig å tenke seg hvordan en kunne gå fram for å oppnå dette: For hvert punkt på  $\Gamma$  finner vi karakteristikken gjennom punktet. Når vi deretter drar punktet langs  $\Gamma$ , vil samlingen av alle karakteristikkene gjennom punktet definere ei flate i rommet, og siden karakteristikkene ligger i flata, må nødvendigvis normalvektorene til flata stå ortogonalt på karakteristikkene, med andre ord, vi har faktisk fått situasjonen i ligning 347, og har dermed funnet en løsning til 338. Dette er illustrert på figur 37.

Det er imidlertid to spesielle situasjoner som en kan være klar over. Den ene inntreffer hvis deler av  $\Gamma$  selv er en karakteristikk. Skulle dette være tilfelle, vil ikke løsningen av Cauchyproblemet lenger være entydig bestemt i dette området.

Den andre muligheten er at det fins funksjoner  $f(x, y)$  slik at

$$\begin{aligned} P(x, y, f(x, y)) &= 0, \\ Q(x, y, f(x, y)) &= 0, \\ R(x, y, f(x, y)) &= 0. \end{aligned} \tag{348}$$

Slike funksjoner kalles *singulære løsninger*, siden de også naturligvis vil tilfredsstille ligning 338.

Denne måten å løse ligningen på kan synes enkel, men den er implisitt og ikke alltid så lett å gjennomføre i praksis. Selv om en kjenner både  $\Gamma$  og karakteristikkene, kan det være vanskelig (eller helt umulig) å skrive løsningen på eksplisitt form. Dette må en avfinne seg med.

## 8.2 Et eksempel

Følgende litt sære eksempel er hentet fra Bind III av det klassiske læreverket *Lærebok i matematisk analyse*, av R. Tambs Lyche, §282 (brukt på NTH i en menneskealder).

Vi skal finne løsningen til ligningen

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0 \tag{349}$$

som går gjennom romkurven

$$\mathbf{r}(t) = -\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{350}$$

Første punkt blir å bestemme alle karakteristikkene, dvs. løse

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= x, \\ \frac{dy}{ds} &= y, \\ \frac{dz}{ds} &= 1.\end{aligned}\tag{351}$$

Det er ikke vanskelig å løse disse ligningene,

$$\begin{aligned}x(s) &= C_1 e^s, \\ y(s) &= C_2 e^s, \\ z(s) &= s + C_3.\end{aligned}\tag{352}$$

Imidlertid gjenstår det å finne et uttrykk for karakteristikkene som krysser romkurven, og dermed eliminere de valgfrie konstantene i lign. 352. Det er flere måter å gå fram på her, og framgangsmåten nedenfor er litt enklere enn den vi finner i originalverket. La oss anta at karakteristikkene krysser romkurven for  $s = 0$ . I så fall finner vi

$$\begin{aligned}C_1 &= -1, \\ C_2 &= 2t, \\ C_3 &= t^2,\end{aligned}\tag{353}$$

og løsningen blir dermed flata definert parametrisert av

$$\begin{aligned}x &= -e^s, \\ y &= 2te^s, \\ z &= s + t^2,\end{aligned}\tag{354}$$

for  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ .

I dette spesielle tilfellet er det også mulig å eliminere  $s$  og  $t$ , og skrive  $z$  som en funksjon av  $x$  og  $y$ . Fra de to første ligningene ser vi at

$$s = \ln(-x),\tag{355}$$

$$t = -\frac{y}{2x}.\tag{356}$$

Hvis vi setter dette inn i siste ligning, får vi

$$z = \ln(-x) + \left(\frac{y}{2x}\right)^2.\tag{357}$$

## Referanser

- [1] Barenblatt, G.I: *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [2] Berg, P., A. Mason and A. Woods: Continuum approach to car-following models, *Phys. Rev. E.*, Vol. 61, No. 2 (2000) pp. 1056–1066.
- [3] Bohr, T. , P. Dimon og V. Pudkaradse: “Shallow Water Approach to the Circular Hydraulic Jump”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 254 (1993), pp. 365–384.
- [4] Crank, J: *Mathematics of Diffusion*, Oxford, 1983.
- [5] Fowkes, N.D. og J.J. Mahony: *An Introduction to Mathematical Modelling*, J. Wiley & Sons, 1994.
- [6] Fowler, A.C: *Mathematical Models in the Applied Sciences*, Cambridge University Press, 1997, Cambridge.
- [7] Gartner, N., C.J. Messer and A.K.Rathi: *Traffic Flow Theory*, Transportation Research Board Special Report, 1998, <http://www.thfrc.gov/its/tft>.
- [8] Grindrod, P.: *Patterns and Waves*, Oxford Applied Math. and Comp. Sciences, 1991.
- [9] Haberman: *Mathematical models, Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow*, Prentice-Hall, 1977.
- [10] Kerner. B.: The Physics of Traffic, *Physics World*, August 1999.
- [11] Lamb, H.: *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1932 (Også Dover, 1945).
- [12] Lin, C.C. og L.A. Segal: *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, SIAM Classics in Applied Mathematics, 1988.
- [13] Logan, J.D.: *Applied Mathematics - A Contemporary Approach* J. Wiley & Sons, 1987.
- [14] Mahnke, R. and J. Kaupuzs: Stochastic theory of freeway traffic, *Phys. Rev. E.*, Vol. 59 (1999) pp. 117–125.
- [15] May, A.D.: *Traffic Flow Fundamentals*, Prentice-Hall, New Jersey, 1990.
- [16] Munson, B. R., D. F. Young og T. H. Okiishi, *Fundamentals of fluid mechanics*, 4th ed., Wiley, 2002.
- [17] Sachdev, P.L.: *Self-similarity and Beyond: Exact Solutions of Nonlinear Problems*, Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics, Vol. 113 (2000). E-bok for NTNU.
- [18] Watson, E.J. : “The radial spread of a liquid jet over a horizontal plate”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 20 (1964), pp. 481–499
- [19] Whitham, G.: *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, 1974.