Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25

EKSAMEN I TMA4195 Matematisk modellering

Bokmål
Fredag 19. desember 2003
Kl. 9–15

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 19. januar 2004

Oppgave 1 Ved laminær (ikke-turbulent) væskestrøm i et sylindrisk rør virker det en friksjonskraft f per arealenhet på rørveggen (enheter $\mathrm{N/m^2}$) som kun avhenger av rørets diameter, total væskestrøm i røret (enheter $\mathrm{m^3/s}$) og væskens dynamiske viskositet μ (enheter $\mathrm{Ns/m^2}$). Hva er den mest generelle formen denne avhengigheten kan ha?

Når en blodåre med diameter d_1 deler seg i to blodårer hver med diameter d_2, viser det seg at $d_1^3 \approx 2d_2^3$ (dette er kjent som *Murrays lov*). Hva impliserer det om f før og etter delingen?

Oppgave 2

a) Hva vil det si å skalere en ligning? Hva er hensikten med å skalere ligninger?

En fiskebestand kan grovt forenklet modelleres med en ligning som, etter skalering, har formen

$$\dot{x} = x - x^2 - \mu \tag{1}$$

hvor det siste leddet skyldes fiske på bestanden.

b) Gjør rede for hvilke antagelser som ligger bak en slik modell. Skriv opp modellen slik den ser ut før skalering, forklar hva koeffisientene betyr, angi hvilken skalering som leder til (1) og kommenter kort om denne skaleringen er god.

c) Tegn et bifurkasjonsdiagram (et diagram som viser likevektspunktene i (μ, x)-planet) for det dynamiske systemet i (1). Bruk heltrukne linjer for stabile, og stiplede linjer for ustabile, likevektspunkter. Inkluder både positive og negative x og μ i diagrammet (selv om negative verdier ikke gir mening for en fiskepopulasjon).

Hvilken verdi av μ vil teoretisk kunne gi den største fangsten i det lange løp? Hva betyr dette i ord? Hvorfor vil dette valget i praksis med stor sikkerhet føre til at all fisken blir fisket opp?

d) I stedet for å velge en fast fiskekvote, kunne man tenke seg å gi en fiskekvote som til enhver tid er proporsjonal med fiskebestanden, noe som leder til systemet

$$\dot{x} = x - x^2 - \alpha x. \tag{2}$$

(Vi ser bort fra de praktiske vanskelighetene med å estimere x.) Tegn bifurkasjonsdiagrammet for dette systemet. Hvilken verdi av α vil gi den største fangsten i det lange løp? Har denne forvaltningsplanen tilsvarende problemer som en plan med en fast bestemt kvote?

Oppgave 3 Det er vel kjent at man kan brenne seg på skaftet av en suppeøse i sølv, mens en tilsvarende øse i rustfritt stål ikke gir samme problem. Vi skal modellere skaftet (sterkt forenklet) som en lang og tynn rektangulær boks med lengde L, bredde b og tykkelse (som tilsvarer tykkelsen på øseskaftet) $2h$, der $\varepsilon = h/L \ll 1$. Men vi skal også anta at det ikke skjer noe varmeledning i bredderetningen, slik at modellen kan forenkles videre til en todimensjonal modell.

Den ene enden (med $x^* = L$) er i kontakt med suppen, med temperatur T_s, mens den andre enden ($x^* = 0$) er i kontakt med hånden, med temperatur T_h. Vi antar at også omgivelsene holder en temperatur T_h, og at varme lekker ut fra overflaten av skaftet (der $y^* = \pm h$) med en rate lik $\beta \cdot (T^* - T_h)$ per arealenhet.

Dette er et typisk eksempel på en *lang og tynn* modell, og løses etter samme prinsipper som når man studerer smøring, nemlig ved å bruke forskjellige lengdeskalaer i de to retningene.

Vi skal kun se på det stasjonære tilfellet.

a) Still opp ligninger for problemet i fysiske variabler, og identifiser alle parametrene som inngår. (*Hint*: Bredden b skal ikke forekomme i den ferdige modellen.) Vis at problemet etter en passende skalering kan skrives på formen

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad -1 < y < 1,$$

$$T(0, y) = 0, \quad T(1, y) = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \pm \gamma T = 0 \text{ i } y = \pm 1.$$

Vi skal sette $\gamma = (\alpha\varepsilon)^2$. Under hvilke betingelser gir dette et fornuftig utgangspunkt for en perturbasjonsregning med ε som liten parameter?

b) Før inn $T = T_0 + \varepsilon^2 T_2 + O(\varepsilon^4)$ i ligningene. Vis ut fra nullte-ordensleddene at T_0 bare avhenger av x, men ellers er ubestemt. Undersøk deretter leddene av orden ε^2 for å finne ut mer om T_2, og bruk så dette til å bestemme T_0. Hva blir varmestrømmen inn i hånden (til første tilnærming) for henholdsvis stål og sølv? For ståløsen kan du regne varmeledningsevne $150\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ og $h = 2\,\mathrm{mm}$. For sølvøsen kan du regne varmeledningsevne $420\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ og $h = 5\,\mathrm{mm}$. For begge øsene kan du regne $b = 20\,\mathrm{mm}$, $\beta = 10\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$.

Oppgave 4 Ligningen

$$\sigma \frac{d^2\theta^*}{ds^{*2}} + F\sin(\theta^*) = 0$$

oppstår ved studiet av en stålbjelke som presses sammen med en kraft $F > 0$ i retning langs x^*-aksen. Her er s^* buelengde langs bjelkens senterlinje, og $\theta^* = \theta^*(s^*)$ er vinkelen mellom denne senterlinjen og x^*-aksen. σ er et mål på bjelkens stivhet.

La L være bjelkens lengde, slik at ligningen over antas å holde for $0 < s^* < L$. Vi skal også anta at

$$\frac{d\theta^*}{ds^*}(0) = \frac{d\theta^*}{ds^*}(L) = 0.$$

(Dette svarer til at endene av bjelken ikke er fastspent, med andre ord at det ikke virker noe kraftmoment på bjelken i endepunktene.)

Vi er interessert i å studere moderate utslag på bjelken, det vil si at $\theta^*(s^*) \approx 0$.

a) Forklar hvordan en passende skalering av problemet leder til

$$\theta''(s) + f\frac{\sin\bigl(\varepsilon\theta(s)\bigr)}{\varepsilon} = 0, \qquad 0 < s < \pi,$$
$$\theta'(0) = \theta'(\pi) = 0.$$

(Ikke gjør lengdeskalaen avhengig av F. Det virker naturlig å gjøre det, men det viser seg å ødelegge for løsningen av neste punkt.) Valget av π for den dimensjonsløse lengden i stedet for det mer naturlige valget 1, var i første runde motivert av at det gjør regningene noe enklere – men det er også en (marginalt) bedre skalering. Kan du se hvorfor?

Her er $\theta(s) = 0$ for alle s en åpenbar løsning (og en ettertraktet løsning, siden den betyr at bjelken ikke bøyer seg). Det er vår hensikt å bestemme om denne *trivielle* løsningen er stabil.

Om vi lar $\varepsilon \to 0$ i ligningen finner vi en lineær ligning. Skriv opp denne ligningen og løsningene til den. Vis at det lineære problemet (når vi tar hensyn til randbetingelsene) kun har ikketrivielle løsninger for $f = 1, 4, 9, \ldots$.

Løsningene med $f \geq 2$ er intuitivt ustabile. Vi skal derfor konsentrere oss om løsningen med $f = 1$, og lete etter løsninger i nærheten av denne når $0 < \varepsilon \ll 1$.

b) Siden ligningen er symmetrisk i ε forventer vi det samme av løsningen, slik at om vi uttrykker løsningen som en potensrekke skal bare like potenser av ε forekomme. Vi forventer at også f blir en funksjon av ε. Sett derfor

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta_0(s) + \varepsilon^2\theta_2(s) + O(\varepsilon^4), \\ f &= 1 + f_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Sett $\theta_0(s) = \cos(s)$ (hvorfor?), og bestem f_2 og θ_2.

Tenk deg at vi langsomt øker kraften på bjelken inntil vi når $f = 1$, og så fortsetter å øke f. Nå vil bjelken begynne å bøye seg. Kan den fortsatt motstå kraften f, eller vil den plutselig knekke sammen? Hva har fortegnet til f_2 med dette spørsmålet å gjøre?