TMA4195 Matematisk modellering, 19. desember 2003

Løsningsforslag

Oppgave 1

Vi kan stille opp en dimensjonsmatrise:

	f	d	U	μ
N	1	0	0	1
m	-2	1	3	-2
s	0	0	-1	1

(Å bruke N, m, s som fundamentale enheter i stedet for kg, m, s er ukonvensjonelt, men det er ikke noe galt i det, og akkurat her er det litt enklere.) Vi ser at dimensjonsmatrisen har rang 3 (de første tre søylene er uavhengige), så det eksisterer presis $4-3=1$ uavhengig dimensjonsløs kombinasjon. Vi kan finner den ved lineæralgebra: En nullvektor til dimensjonsmatrisen er $[1,3,-1,-1]$ som gir $\pi_1 = fd^3/(U\mu)$. (Vi kunne også sett det direkte.) Ved Buckinghams pi-teorem må enhver fysisk meningsylt sammenheng mellom disse størrelsene være på formen $\pi_1 =$ konstant, med andre ord $f =$ konstant $\cdot\, U\mu/d^3$.

Når en blodåre deler seg i to like store deler, vil volumstrømmen U i hver gren etter forgreningen være halvparten av verdien før. Når også d^3 halveres må f være den samme. (Dette kan virke plausibelt fordi cellene på innsiden av åreveggen kan «kjenne» f direkte.)

Oppgave 2

a) Å skalere en ligning vil si å erstatte hver (avhengig eller uavhengig) variabel q^* i ligningen med med en dimensjonsløs variabel q ved å sette $q^* = \bar{q}q$, der $\bar{q}$ er en konstant. Skalaen $\bar{q}$ velges gjerne slik at q varierer mellom 0 og 1, eller slik at interessante deriverte har et tilsvarende variasjonsområde. Ett mål er å gi de dominerende leddene i ligningen(e) størrelsesorden 1.

Skaleringen har mer enn en hensikt: Den gjør det lett å se forskjell på store og små termer i ligningene, og er en dermed en god ledetråd i å finne en god perturbasjonsformulering for problemer med små parametre. Ikkedimensjonalisering, som er en del av skaleringsprosessen, er også nyttig fordi det reduserer antallet uavhengige parametre. Korrekt skalering er også til nytte i numeriske beregninger.

b) Fiskebestanden vil, om den overlates til seg selv, maksimalt kunne nå en størrelse M – vanligvis på grunn av begrensninger i mattilgangen. Hvis vi regner at *relativ* tilvekst er proporsjonal med $M - x^*$ ledes vi til

$$\frac{1}{x^*}\frac{dx^*}{dt^*} = A\cdot(M - x^*),$$

der A er et mål på fertiliteten i fiskebestanden. Etter at vi har multiplisert med x^* og trukket fra et ledd F for fanget kvantum per tidsenhet får vi

$$\frac{dx^*}{dt^*} = Ax^*(M - x^*) - F.$$

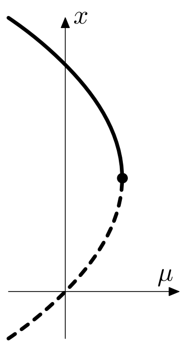
Vi skalerer dette ved å sette

$$x^* = Mx, \quad t^* = \frac{t}{AM}$$

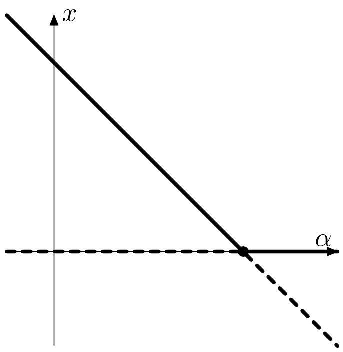
og får så den oppgitte modellen

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 - \mu, \qquad \text{der } \mu = \frac{F}{AM^2}.$$

Dersom det ikke er noen fangst ($\mu = 0$) vil x typisk kunne variere mellom 0 og 1 (henholdsvis utryddelse og maksimal bestand), så x virker rimelig skalert. Samtidig blir den deriverte $\dot{x}$ maksimalt lik $\frac{1}{4}$ (når $x = \frac{1}{2}$), så kanskje vi skulle brukt en tidsskala lik $\frac{1}{4}$ ganger den valgte. Men dette er ingen stor innvending, og vi beholder den valgte skaleringen av bekvemmelighetshensyn.



Oppgave **2c)**



Oppgave **2d)**

c) Om vi skriver $f(x,\mu) = x - x^2 - \mu$ finner vi likevekt der $f(x,\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = x - x^2$, og likevekten blir stabil der hvor $\partial f/\partial x = 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Fangsten ved likevekt blir proporsjonal med $\mu = x - x^2$, som er maksimal for $x = \frac{1}{2}$, altså $\mu = \frac{1}{4}$. Dette svarer til å fiske så mye at fiskebestanden er halvparten av sin maksimale verdi.

Men denne verdien faller på kanten av det stabile området, og vi havner i toppunktet på parabelen i bifurkasjonsdiagrammet. Når vi er på utsiden av parabelen blir $\dot{x} = f(x,\mu) < 0$, og bestanden avtar inntil vi treffer et likevektspunkt. I dette tilfellet er det ikke noen likevektspunkt å treffe, og modellen leder til at $x \to -\infty$ når $t \to \infty$. (Denne absurditeten skyldes at modellen forutsetter en konstant fangstrate selv om det betyr at man fanger mer fisk enn det finnes. En bedre modell skulle ta hensyn til at det blir vanskeligere å få fisk når bestanden er liten.) En vilkårlig liten perturbasjon vekk fra likevektspunktet i $(x,\mu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ kan derfor lede til at bestanden utslettes.

d) Om vi skriver $g(x,\alpha) = x - x^2 - \alpha x$ finner vi likevekt der $g(x,\alpha) = 0$, altså når $x = 0$ eller $x = 1 - \alpha$, og likevekten blir stabil der hvor $\partial g/\partial x = 1 - \alpha - 2x < 0$. Likevektspunktet i $x = 0$ er altså stabilt presis når $\alpha > 1$, mens det i $x = 1 - \alpha$ er stabilt når $x > \frac{1}{2}(1-\alpha) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x > 0$.

Fangsten er proporsjonal med $\alpha x = \alpha - \alpha^2$ på den ene grenen av bifurkasjonsdiagrammet (på den andre grenen blir den, og bestanden, null). Største verdi oppnås for $\alpha = \frac{1}{2}$, som også gir $x = \frac{1}{2}$. Av bifurkasjonsdiagrammet ser vi at denne likevekten er stabil, og alle løsninger konvergerer mot denne verdien for alle initialverdier $x_0 > 0$.

Oppgave 3

a) Den stasjonære varmeledningsligningen gir

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = 0, \qquad 0 < x^* < L, \quad -h < y^* < h.$$

Betingelsene på endene kan skrives

$$T^*(0,y^*) = T_0, \quad T^*(L,y^*) = T_1.$$

Varmeledningen ut av sidene $y^* = \pm h$ er gitt ved $\mp bk\,\partial T^*/\partial y^*$ per lengdeenhet, der k er varmeledningsevnen. Denne må være lik varmetapet per lengdeenhet $b\beta(T^* - T_0)$. Etter forkorting med b gir dette

$$\mp k\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \beta(T^* - T_0), \qquad y^* = \pm h.$$

Om vi nå skalerer ligningene med

$$x^* = Lx, \quad y^* = hy, \quad T^* = T_0 + (T_1 - T_0)T,$$

får vi den oppgitte modellen med

$$\varepsilon = \frac{h}{L}, \quad \gamma = \frac{\beta h}{k}.$$

Hvis $h \to 0$ mens andre fysiske parametre er uendret, er det klart at γ blir proporsjonal med h. Å sette inn $\gamma = \alpha^2\varepsilon^2$ slik oppgaven foreslår, kan virke fornuftig dersom

$$\alpha = \frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\beta L^2}{kh}}$$

får størrelsesorden 1 – og neppe ellers.

b) Vi får

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}\Big) &= O(\varepsilon^4),\\
T_0(0,y) + \varepsilon^2 T_2(0,y) &= O(\varepsilon^4),\\
T_0(1,y) + \varepsilon^2 T_2(1,y) &= 1 + O(\varepsilon^4),\\
\frac{\partial T_0}{\partial y} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial T_2}{\partial y} \pm \alpha^2 T_0\Big) &= O(\varepsilon^4), \qquad y = \pm 1.
\end{aligned}$$

Vi setter inn $\varepsilon = 0$ og finner $\partial^2 T_0/\partial y^2 = 0$, så $T_0 = A(x)y + B(x)$. Men fra den siste ligningen får vi $\partial T_0/\partial y = 0$ for $y = \pm 1$, så $A(x) = 0$, og T_0 avhenger bare av x.

Fra ε^2-leddet i første ligning får vi nå

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2},$$

og siden høyresiden ikke avhenger av y kan vi integrere dette til

$$T_2 = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2}y^2 + C(x)y + D(x).$$

For $y = \pm 1$ får vi (fra den siste ligningen)

$$0 = \frac{\partial T_2}{\partial y} \pm \alpha^2 T_0 = -\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2}y + C(x) \pm \alpha^2 T_0 = \mp\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + C(x) \pm \alpha^2 T_0$$

og siden dette skal holde for begge valg av fortegnene (hvor $\mp$ hele tiden betyr fortegnet motsatt $\pm$), må både $C(x) = 0$ og

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} - \alpha^2 T_0 = 0.$$

Dette siste er i virkeligheten en ordinær differensialligning, siden T_0 ikke avhenger av y. Vi kan skrive den $T_0'' - \alpha^2 T_0 = 0$, og den skal løses med randbetingelser $T_0(0) = 0$, $T_0(1) = 1$. Løsningen blir

$$T_0 = \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha)}.$$

Varmefluksen inn i hånden blir

$$\begin{aligned}\dot{Q} = bhk\frac{\partial T^*}{\partial x^*}(0) &= \frac{bhk(T_s - T_h)}{L}\frac{\partial T}{\partial x}(0) = \frac{bhk(T_s - T_h)}{L}\Big(\frac{\partial T_0}{\partial x}(0) + O(\varepsilon^2)\Big)\\ &= \frac{bhk(T_s - T_h)}{L}\Big(\frac{\alpha}{\sinh(\alpha)} + O(\varepsilon^2)\Big).\end{aligned}$$

Det kan være verdt å legge merke til at den første brøken er verdien vi ville fått om det ikke var noe varmetap til omgivelsene: $\beta = 0$ gir $\alpha = 0$ – eller vi ser direkte at temperaturen varierer lineært med x^*, så temperaturgradienten blir $(T_s - T_h)/L$.

Nå var det ikke oppgitt noen verdier for T_s eller T_h. Men om suppa er kokende virker $T_s - T_h \approx 60\,\mathrm{K}$ rimelig. Det var heller ikke oppgitt noen verdi for L. Vi kan for eksempel sette $L = 10\,\mathrm{cm}$ (lengden av den delen av skaftet som stikker opp av suppen).

For ståløsen blir da $\alpha \approx 0.58$, og $\alpha/\sinh(\alpha) \approx 0.95$ – så varmeledningen inn i hånden blir bare 5 % mindre enn om det ikke var noe varmetap til omgivelsene. Jeg finner $\dot{Q} \approx 3.4\,\mathrm{W}$ med disse verdiene.

For sølvøsen blir $\alpha \approx 0.22$, og $\alpha/\sinh(\alpha) \approx 0.99$ – så varmetapet til omgivelsene er nesten totalt neglisjerbare. Jeg finner $\dot{Q} \approx 25\,\mathrm{W}$ med disse verdiene.

Konklusjonen må bli at vi ganske visst brenner oss på sølvskjeen, både fordi varmeledningsevenen er mye høyere og fordi skaftet er tjukkere (fordi sølv ikke er like sterkt som stål). Videre hadde vi ikke trengt å ta hensyn til varmetapet til omgivelsene, i hvert fall ikke om de oppgitte verdiene er korrekte. (Verdien på β er nok den mest tvilsomme, utledet av Plancks strålingslov.)

Oppgave 4

a) Ligningene i oppgaven kan oppsummeres med

$$\sigma\frac{d^2\theta^*}{ds^{*2}} + F\sin(\theta^*) = 0, \qquad 0 < s^* < L,$$
$$\frac{d\theta^*}{ds^*}(0) = \frac{d\theta^*}{ds^*}(L) = 0.$$

Hvis bjelken ikke bøyes veldig mye, er $\theta^* \approx 0$. I så fall kan vi som en første tilnærming sette inn $\cos(\theta^*) = 1$ og $\sin(\theta^*) = \theta^*$ i ligningen og få

$$\sigma\frac{d^2\theta^*}{ds^{*2}} + F\theta^* = 0,$$

med generell løsning $\theta^* = A\cos(\sqrt{F/\sigma}s^*) + B\sin(\sqrt{F/\sigma}s^*)$. Randbetingelsen i $s^* = 0$ gir $B = 0$, og randbetingelsen i $s^* = L$ gir da at enten er $A = 0$ eller $\sqrt{F/\sigma}L = n\pi$ med heltallig n. Både $A = 0$ og $n = 0$ gir bare trivielle løsninger, men $n = 1$ gir en løsning som svarer til at bjelken bøyer seg til en side.

En lengdeskala som skalerer denne løsningen riktig ville være $\sqrt{\sigma/F}$, men vi ønsker ikke å ha F i skaleringen. Men løsningen med $n = 1$ gir $\sqrt{\sigma/F} = L/\pi$, så vi bruker heller L/π som lengdeskala.

En mer naiv skalering vil simpelthen bruke lengdeskalen L for å la s variere fra 0 til 1. Dette ville vært fullt akseptabelt, men leder til litt mer komplisert regning. Så snart man ser hvordan løsningen blir, er det derfor naturlig å ta med faktoren π av bekvemmelighetshensyn. Men argumentet ovenfor viser også hvorfor dette er en bedre skalering.

Vi er interessert i løsninger med relativt små utslag, så det virker rimelig å reskalere θ^* med $\theta^* = \varepsilon\theta$.

Setter vi inn dette og $s^* = Ls/\pi$ og forenkler, får vi problemet slik det er stilt opp i oppgaven, med

$$f = \frac{L^2 F}{\sigma\pi^2}.$$

I grensen $\varepsilon \to 0$ blir ligningen $\theta'' + f\theta = 0$, som vi løser på akkurat samme måte som ovenfor, med løsning $\theta = A\cos(\sqrt{f}s)$. På grunn av randbetingelsene må $\sqrt{f}$ være heltallig for at det skal finnes en ikketriviell løsning.

b) Vi setter inn som angitt i oppgaven. Vi bruker $\sin(\varepsilon\theta)/\varepsilon = \theta - \frac{1}{6}\varepsilon^2\theta^3 + O(\varepsilon^4)$ og får

$$\theta_0'' + \varepsilon\theta_2'' + (1 + f_2\varepsilon^2)(\theta_0 + \varepsilon^2\theta_2 - \tfrac{1}{6}\varepsilon^2\theta_0^3) = O(\varepsilon^4).$$

Litt opprydding gir

$$\theta_0'' + \theta_0 + \varepsilon^2(\theta_2'' + \theta_2 + f_2\theta_0 - \tfrac{1}{6}\theta_0^3) = O(\varepsilon^4),$$

slik at

$$\theta_0'' + \theta_0 = 0, \quad \theta_2'' + \theta_2 = \tfrac{1}{6}\theta_0^3 - f_2\theta_0.$$

På grunn av randbetingelsene må vi ha $\theta_i'(0) = \theta_i'(\pi) = 0$ for $i = 1, 2$. Vi finner $\theta_0 = A\cos(s)$, og setter $A = 1$ fordi vi allerede har skalert $\theta^* = \varepsilon\theta$, så $A = 1$ stemmer med den skaleringen – og det har åpenbart ingen hensikt å introdusere enda en multiplikativ konstant.

Ligningen for θ_2 blir nå

$$\theta_2'' + \theta_2 = (\tfrac{1}{8} - f_2)\cos(s) + \frac{1}{24}\cos(3s)$$

(der vi har utnyttet $\cos^3(s) = \frac{1}{4}\cos(3s) + \frac{3}{4}\cos(s)$). Ligningen har generell løsning

$$\theta_2(s) = (\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{2}f_2)s\sin(s) - \tfrac{1}{192}\cos(3s) + A\cos(s) + B\sin(s).$$

Randbetingelsen $\theta_2'(0) = 0$ gir B=0, og deretter gir $\theta_2'(\pi) = 0$ at $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}f_2$, altså $f_2 = \frac{1}{8}$.

Vi har ikke bestemt A, men vi legger merke til at leddet $\varepsilon^2 A\cos(s)$ har samme form som $\theta_0 = \cos(s)$, så det har ingen hensik å ta det med. Vi ender altså med

$$\theta_2(s) = -\tfrac{1}{192}\cos(3s), \quad f_2 = \tfrac{1}{8},$$

eller med andre ord

$$\theta(s) = \cos(s) - \tfrac{1}{192}\varepsilon^2\cos(3s) + O(\varepsilon^4), \quad f = 1 + \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Spesielt er $f > 1$, i hvert fall for små ε.

For $f < 1$ har vi sett at problemet kun har den trivielle løsningen. Det vil si at bjelken overhodet ikke bøyer seg. Hvis materialet ellers er sterkt nok til å motstå sammentrykkingen, vil altså bjelken holde. Når f vokser over 1, får vi løsningen ovenfor med $\varepsilon \approx \sqrt{8(f-1)}$. Den trivielle løsningen vil være ustabil, for om bjelken først bare bøyes litt, vil den bøyes mer og mer inntil $\varepsilon \approx \sqrt{8(f-1)}$. Men denne konfigurasjonen er stabil, siden større bøy (større ε) gir en øket kraft til å motstå sammentrykkingen. Om vi hadde funnet $f_2 < 0$, ville det vært omvendt, og bjelken ville plutselig knukket.

Om vi legger merke at $\theta^* = \varepsilon\theta \approx \sqrt{8(f-1)}\cos(s)$, ser vi at det fort oppstår en ganske stor bøy i bjelken dersom f overstiger 1. Vi vil derfor forvente at bjelken kan brekke ganske raskt, og det tryggeste er utvilsomt å designe for $f = L^2F/(\sigma\pi)$ en god del mindre enn 1. f kan øke enten ved at F øker eller ved at stivheten σ avtar. Det siste kan for eksempel skje gjennom oppvarming, og resultatet kan være katastrofalt – noe som ble demonstrert nokså dramatisk 11. september 2001.