Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

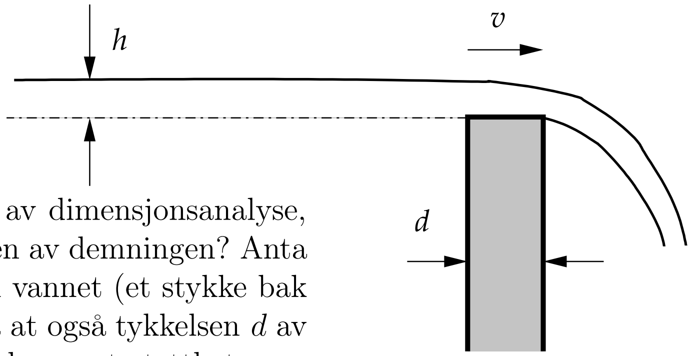
Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25

EKSAMEN I TMA4195 Matematisk modellering

Bokmål
Fredag 17. desember 2004
Varighet: 4 timer

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 17. januar 2005



Oppgave 1 Når vannet bak en demning blir høyere enn toppen av demningen, begynner vannet å renne over toppen av demningen. Hva kan du si, bare ved hjelp av dimensjonsanalyse, om middelhastigheten til vannet over toppen av demningen? Anta den avhenger av høydeforskjellen h mellom vannet (et stykke bak demningen) og toppen av demningen. Anta at også tykkelsen d av demningen kan spille en rolle, sammen med vannets tetthet ρ og kinematiske viskositet ν (måles i m^2/s). Det er rimelig å anta at svaret har en endelig grense når $d \to 0$ og $\nu \to 0$. Hva sier dimensjonsanalysen om denne grensen?

Oppgave 2 Tegn et bifurkasjonsdiagram som angir posisjon og stabilitet for likevektspunktene til systemet

$$\frac{du}{dt} = (\mu - 2u^2 + u^3)(\mu + u).$$

Oppgave 3

a) Hva er forskjellen på et regulært og et singulært perturbasjonsproblem?

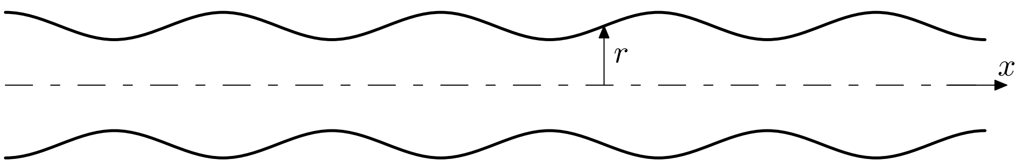
b) Betrakt problemet

$$y'' = (1 + \varepsilon x)y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Finn en tilnærmet løsning med en feil $O(\varepsilon^2)$ for $0 \leq x \leq 1$.
(Du trenger ikke *bevise* noe feilestimat. Hint: Prøv $y_1 = wy_0$ for en funksjon w.)

Oppgave 4 Vi tenker oss følgende eksperiment i en situasjon med neglisjerbar tyngdekraft – for eksempel på en romstasjon: Vi lager en sylinderformet «pølse» av vann, mest mulig i ro, og ser hvordan den utvikler seg. (Vi ser bort fra de ikke ubetydelige vanskelighetene med å få til dette i praksis.)

«Vannpølsen» kan ikke få en helt uniform radius. Der hvor radien er mindre, er trykket større på grunn av overflatespenningen, og den resulterende trykkgradienten vil drive vannet i retning lavere trykk, altså der hvor «pølsen» allerede er tykkere. Denne ustabiliteten leder til slutt til at «vannpølsen» brytes opp i et antall isolerte dråper.



(Man ser det samme fenomenet med vann som renner fra en kran, men tyngdekraften gjør det problemet mer komplisert å analysere.)

a) Anta at den tiden T det tar før vannet deles i dråper avhenger av «vannpølsens» radius R, vannets tetthet ρ og overflatespenningen σ (med enheter $\mathrm{N/m} = \mathrm{kg/s^2}$). Hva er den mest generelle formen denne avhengigheten kan ha?

Hastighetsfeltet $\mathbf{v}^*$ i vannet vil oppfylle *Navier–Stokes-ligningen*:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \rho(\mathbf{v}^* \cdot \nabla_*)\mathbf{v}^* = -\nabla_* p^* + \mu\nabla_*^2\mathbf{v}^*, \tag{1}$$

der ∇_* er gradienten med hensyn på $\mathbf{x}^*$. Vi regner tettheten ρ som konstant. Dessuten vil trykket (egentlig: trykket minus atmosfæretrykket) oppfylle randbetingelsen

$$p^* = \sigma\kappa^*$$

på overflaten, der κ^* er *middelkrumningen* til overflaten. (Her trenger du ikke vite den eksakte definisjonen til κ^*, annet enn at den måles i m^{-1} og skaleres slik du forventer at den inverse av en lengde skal skaleres ved skifte av lengdeskala. Men det kan også være kjekt å vite at $\kappa^* = 1/r^*$ for en kule, og $\kappa^* = 1/(2r^*)$ for en sylinder, med radius r^*.)

b) Innfør en skalering med lengdeskala R (midlere radius til «vannpølsen») og trykkskala $\sigma/(2R)$. Kall tidsskalaen T, og velg en konsistent skalering for $\mathbf{v}^*$. Hva blir en fornuftig verdi på T, dersom du antar at det viskøse leddet (siste leddet på høyresiden) i (1) er neglisjerbart? Sammenlign dette med svaret på forrige punkt. Skriv opp den skalerte utgaven av (1). Under hvilke omstendigheter virker antagelsen om det viskøse leddet kan ignoreres rimelig? Uttrykk svaret både i generelle termer, og spesifikt for vann, med $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{kg/(m\cdot s)}$ og $\sigma = 0.07\,\mathrm{N/m}$.

Vi skal anta at vannet fyller området gitt ved $\sqrt{y^2+z^2} \le r(x,t)$, og at x-komponenten u av $\mathbf{v}$ kun er en funksjon av x og t.

c) Gi et argument som rettferdiggjør ligningen

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^2) + \frac{\partial}{\partial x}(r^2 u) = 0. \tag{2}$$

Dersom vi nå går et skritt videre og skriver $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$, reduseres (1) – etter skalering, og etter at vi har kastet bort det viskøse leddet – til

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\Big). \tag{3}$$

(Du forventes ikke å utlede denne ligningen. Uttrykket i parentesen er tilnærmet proporsjonal med middelkrumningen så lenge $|\partial r/\partial x| \ll 1$ – og representerer altså det dimensjonsløse trykket.)

d) Hva blir lineariseringen av systemet (2), (3) rundt likevektsløsningen $u = 0$, $r = 1$? (Sett $u = \tilde{u}$ og $r = 1 + \tilde{r}$ og bestem lineære ligninger for $\tilde{u}$, $\tilde{r}$ tilnærmet gyldig når $|\tilde{u}| \ll 1$ og $|\tilde{r}| \ll 1$.)

Undersøk stabiliteten til likevektsløsningen $u = 0$, $r = 1$ ved å prøve løsninger på formen $\tilde{u} = u_0 e^{\lambda t + ikx}$, $\tilde{r} = r_0 e^{\lambda t + ikx}$, med reell k. Du vil finne reelle λ, en positiv og en negativ, så lenge k er liten nok. For hvilken k får vi den største positive λ? Hva er den fysiske betydningen av denne verdien av k og den tilhørende λ?