TMA4195 Matematisk modellering, 17. desember 2004

Løsningsforslag

Oppgave 1

Oppgaven nevner ikke tyngdens akselerasjon g, men den må åpenbart også være med. Dermed har vi seks størrelser og deres enheter:

$$[h] = \mathrm{m}, \quad [d] = \mathrm{m}, \quad [\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}, \quad [\nu] = \mathrm{m^2\,s^{-1}}, \quad [v] = \mathrm{m\,s^{-1}}, \quad [g] = \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Siden ρ er den eneste av disse som inneholder kg, kan den ikke inngå i noen dimensjonsløs kombinasjon, så svaret kan heller ikke avhenge av ρ. De resterende fem størrelsene er uttrykt i to enheter (m og s), så vi forventer tre uavhengige kombinasjoner. (Vi kan se at dimensjonsmatrisen har rang 2 uten å stille den opp, siden for eksempel h og v har uavhengige dimensjoner.) Et mulig valg av dimensjonsløse kombinasjoner er

$$\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gh}}, \quad \pi_2 = \frac{gh^3}{\nu^2}, \quad \pi_3 = \frac{d}{h}.$$

(Mange andre valg er mulige. Jeg valgte π_1 slik fordi $\sqrt{gh}$ er en størrelse med dimensjon hastighet som vi ofte støter på i slike sammenhenger, og π_3 fordi den jo var veldig opplagt. I stedet for π_2 valgte jeg først Reynolds tall $\mathrm{Re} = vh/\nu$, men siden hastigheten er den ukjente her, er det uhensiktsmessig å ha den i mer enn én dimensjonsløs kombinasjon. Men det er ikke *galt*. Forresten er $\pi_2 \approx \mathrm{Re}^2$ når $v \approx \sqrt{gh}$.)

En relasjon som gir v som funksjon av de andre størrelsene må ekvivalent kunne skrives

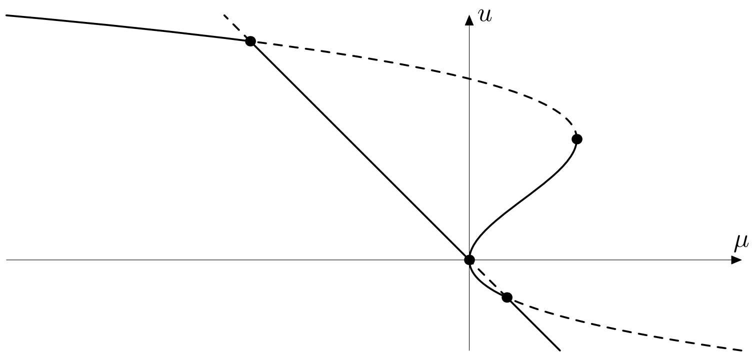
$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3), \quad \text{altså } v = \sqrt{gh} f\Big(\frac{gh^3}{\nu^2}, \frac{d}{h}\Big)$$

der f er en ukjent funksjon. Dersom dette uttrykket har en grense når $d \to 0$ og $\nu \to 0$, må vi ende med

$$v = C\sqrt{gh}$$

i grensen, der C er en konstant.

Oppgave 2



Likevektspunktene ligger henholdsvis på kurven $\mu = 2u^2 - u^3$ og på den rette linjen $\mu + u = 0$. I figuren er brukt stiplet linje for ustabile, og heltrukken linje for stabile, likevektspunkter.

Stabiliteten er lettest å undersøke ved å drøfte fortegn: Faktoren $\mu - 2u^2 + u^3$ er positiv til høyre for kurven, og faktoren $\mu + u$ er positiv til høyre for linjen. Produktet $f(u,\mu) = (\mu - 2u^2 + u^3)(\mu + u)$ blir derfor negativt i de fire områdene *mellom* kurven og linjen, og positivt utenfor. Et likevektspunkt er stabilt når $f(u,\mu) < 0$ ovenfor punktet og $f(u,\mu) > 0$ nedenfor punktet, og ustabilt om ulikhetene går motsatt vei.

For øvrig gjenkjenner vi en pitchfork-bifurkasjon i origo.

Oppgave 3

a) Et perturbasjonsproblem med en liten parameter ε kalles regulært dersom problemet med $\varepsilon = 0$ har samme karakter som det har med $\varepsilon > 0$. For eksempel: Ordinær differensiallikning av samme grad, eller partiell differensiallikning av samme grad og type. I motsatt fall er problemet singulært.

Bruken av ordet «karakter» er litt vag her, og må tolkes med litt velvilje. Vi kaller ikke problemet singulært uten god grunn. For eksempel er ofte problemet med $\varepsilon = 0$ lettere å løse, for eksempel fordi det er lineært – det er derfor perturbasjonsmetoder er så nyttige – men det er ikke i seg selv nok til å si problemet har en annen «karakter». Det er ofte lettest å gjenkjenne et singulært problem på det at det har løsninger for $\varepsilon > 0$, men ingen løsninger for $\varepsilon = 0$, ofte fordi en differensiallikning har lavere grad, og at problemet derfor har for mange initialbetingelser for likningen.

b) Dette er ganske åpenbart et regulært perturbasjonsproblem, og vi kan uten videre forsøke med $y = y_0 + \varepsilon y_1 + O(\varepsilon^2)$. Vi setter inn:

$$y_0'' + \varepsilon y_1'' = (1 + \varepsilon x)(y_0 + \varepsilon y_1) + O(\varepsilon^2) = y_0 + \varepsilon(y_1 + x y_0) + O(\varepsilon^2).$$

Sammen med initialbetingelsene ender vi med

$$\begin{aligned} y_0'' &= y_0 & \qquad y_0(0) &= 1, \quad y_0'(0) = -1,\\ y_1'' &= y_1 + x y_0 & \qquad y_1(0) &= 0, \quad y_1'(0) = 0. \end{aligned}$$

Den første likningen med initialbetingelsene har løsning $y_0 = e^{-x}$, så vi skal ha

$$y_1'' - y_1 = xe^{-x}.$$

Tar vi hintet og prøver oss med $y_1 = we^{-x}$ finner vi $y_1' = (w' - w)e^{-x}$ og $y_1'' = (w'' - 2w' + w)e^{-x}$, så ligningen over blir til $w'' - 2w' = x$. Vi forsøker med $w = ax^2 + bx$ og får $2a - 4ax - 2b = x$, altså $b = a = -\frac{1}{4}$. Den generelle løsningen for det homogene systemet $w'' - 2w' = 0$ er $w = Ae^{2x} + B$, og legger vi til partikulærløsningen vi nettopp fant ender vi med

$$w = Ae^{2x} + B - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x.$$

Randbetingelsen $y_1(0) = 0$ gir $w(0) = 0$, altså $A + B = 0$. Randbetingelsen $y_1'(0) = 0$ gir $w'(0) - w(0) = 0$, altså $2A - \frac{1}{4} = 0$. Alt i alt er $A = \frac{1}{8}$ og $B = -A = -\frac{1}{8}$, og

$$y_1 = we^{-x} = \tfrac{1}{8}e^x - (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x)e^{-x},$$

slik at

$$y = e^{-x} + \varepsilon\big(\tfrac{1}{8}e^x - (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x)e^{-x}\big) + O(\varepsilon^2).$$

Oppgave 4

a) Vi har fire størrelser og deres enheter:

$$[T] = \mathrm{s}, \quad [R] = \mathrm{m}, \quad [\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}, \quad [\sigma] = \mathrm{kg\,s^{-2}}.$$

Dette gir én dimensjonsløs kombinasjon: $(\rho R^3)/(\sigma T^2)$. En relasjon mellom disse størrelsene må være at denne kombinasjonen er konstant, som gir

$$T = C\sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}$$

for en konstant C.

b) Vi setter altså

$$\mathbf{x}^* = R\mathbf{x}, \quad t^* = Tt, \quad \mathbf{v}^* = \frac{R}{T}\mathbf{v}, \quad p^* = \frac{\sigma}{2R}.$$

(Valget av hastighets-skala følger fra valget av lengde- og tidsskala sammen med et ønske om konsistens.) Navier–Stokes-likningen blir til

$$\frac{\rho R}{T^2}\Big(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Big) = -\frac{\sigma}{2R^2}\nabla p + \frac{\mu}{RT}\nabla^2\mathbf{v},$$

og dersom det siste leddet på høyresiden antas neglisjerbart må det første leddet på høyresiden balansere venstresiden, så det er naturlig å kreve at $\rho R/T^2 = \sigma/(2R^2)$, altså

$$T = \sqrt{\frac{2\rho R^3}{\sigma}},$$

som for øvrig passer utmerket godt med det vi fant i punkt **a**.

Etter multiplikasjon med $T^2/(\rho R) = 2R^2/\sigma$ står vi altså igjen med

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \varepsilon\nabla^2\mathbf{v}, \qquad \text{der } \varepsilon = \frac{2\mu R}{\sigma T} = \mu\sqrt{\frac{2}{\rho\sigma R}}.$$

Antagelsen om at vi kan glemme det viskøse leddet virker rimelig dersom $\varepsilon \ll 1$, altså dersom

$$R \gg \frac{2\mu^2}{\rho\sigma}.$$

Med data for vann blir dette

$$R \gg \frac{2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg^2\,m^{-2}\,s^{-2}}}{10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\cdot 0.07\,\mathrm{kg\,s^{-2}}} \approx 0.3\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}.$$

Så lenge vannsylinderen er mye tykkere en noen μm er det altså rimelig å se bort fra viskositeten.

c) Volumet av vannet mellom $x = a$ og $x = b$ blir $\int_a^b \pi r(x)^2\,dx$, og vannstrømmen forbi et gitt punkt på x-aksen blir $\pi r(x)^2 u(x)$. Volumbalansen (egentlig massebalanse, men tettheten er jo konstant i dette tilfellet) blir derfor

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \pi r(x)^2\,dx + \Big[\pi r(x)^2 u(x)\Big]_a^b = 0.$$

Vi dividerer bort faktoren π. Dersom r og u er glatte funksjoner kan dette skrives om til

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\big(r(x)^2\big)\,dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\big(r(x)^2 u(x)\big)\,dx = 0.$$

Ved Reymond–duBois' lemma får vi derfor

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^2) + \frac{\partial}{\partial x}(r^2 u) = 0.$$

d) Vi setter inn $u = \tilde{u}$ og $r = 1 + \tilde{r}$ som foreslått, med $\tilde{u}$ og $\tilde{r}$ små. Så blir $r^2 = (1+\tilde{r})^2 \approx 1 + 2\tilde{r}$ og $r^2 u \approx \tilde{u}$, der vi har kastet bort alle ledd med produkt av mer enn én liten faktor. Setter vi dette inn i oppgavens likning (2) får vi

$$2\frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0.$$

I oppgavens likning (3) faller hele leddet $u\,\partial u/\partial x$ på venstresiden bort, og på høyresiden bruker vi $1/r = 1/(1+\tilde{r}) \approx 1 - \tilde{r}$ slik at vi ender med

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} + \frac{\partial^3 \tilde{r}}{\partial x^3}.$$

Her setter vi nå inn som antydet i oppgaven: $\tilde{u} = u_0 e^{\lambda t + ikx}$, $\tilde{r} = r_0 e^{\lambda t + ikx}$. Faktoren $e^{\lambda t + ikx}$ blir en felles faktor i alle likningene. Etter at vi har forkortet bort denne faktoren, blir de to likningene ovenfor:

$$2\lambda r_0 + iku_0 = 0, \quad \lambda u_0 = (ik - ik^3)r_0.$$

Her kan vi for eksempel multiplisere den første likningen med λ og så sette inn fra den andre:

$$0 = 2\lambda^2 r_0 + ik(ik - ik^3)r_0 = (2\lambda^2 - k^2 + k^4)r_0.$$

Skal vi få en ikketriviell løsning (med $r_0 \neq 0$) må altså

$$2\lambda^2 = k^2 - k^4 = k^2(1-k^2).$$

Vi får reelle verdier av λ så lenge $|k| \le 1$. (For $|k| > 1$ blir λ imaginær, og vi får rene bølgeløsninger). Det vil si at de tilsvarende Fourier-modene kan vokse eksponensielt, på en tidsskala $1/|\lambda|$. Størst mulig positiv λ får vi når $k^2 - k^4$ er maksimal, altså når $2k = 4k^3$, eller $|k| = 1/\sqrt{2}$. (I $k = 0$ har vi et lokalt minimum.) Fouriermodene med $|k| = 1/\sqrt{2}$ er altså mest ustabile. Disse har en bølgelengde $2\pi/|k| = 2^{3/2}\pi$. De vokser med en tidskonstant $1/|\lambda| = 2\sqrt{2}$.

I fysiske koordinater blir den mest ustabile bølgelengden $2^{3/2}\pi R \approx 8.9\,R$, og den vokser med en tidskonstant $2\sqrt{2}T = 4\sqrt{\rho R^3/\sigma}$.