NTNU

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4205 Numerisk lineær algebra**

Faglig kontakt under eksamen: Håkon Marthinsen

Tlf: 73 59 35 44 eller 990 23 030 (mobil)

Eksamensdato: 4. desember 2013
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt. Bestemt, enkel kalkulator er tillatt (enten Citizen SR-270X eller Hewlett Packard HP30S). De tillatte hjelpemidlene er:

- Y. Saad: Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. SIAM, 2003 (bok eller utskrift)
- L. N. Trefethen and D. Bau: Numerical Linear Algebra, SIAM, 1997 (bok eller kopi)
- G. Golub and C. Van Loan: Matrix Computations. 3rd ed. The Johns Hopkins University Press, 1996 (bok eller kopi)
- E. Rønquist: Note on The Poisson problem in $\mathbb{R}^2$: diagonalization methods (utskrift)
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- Dine egne forelesningsnotater fra emnet (håndskrevet)

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 La A være en $n \times n$ Toeplitz-matrise (det vil si en matrise der elementene i hver diagonal er like hverandre) gitt av

$$A = d \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/9 & \cdots & 1/3^{n-1} \\ 1/3 & 1 & 1/3 & \cdots & 1/3^{n-2} \\ 1/9 & 1/3 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/3 \\ 1/3^{n-1} & 1/3^{n-2} & \cdots & 1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

der d er en reell skalar forskjellig fra null.

a) Er A normal?

b) Er egenverdiene til A reelle eller komplekse?

c) Er A positiv definitt?

d) Er A ikke-singulær?

Vi anvender nå Jacobi-iterasjon for å løse det linære ligningssystemet $Ax = b$, der A er gitt ovenfor.

e) Vil Jacobi-iterasjonen konvergere for enhver initialvektor?

f) La L være den nedre-triangulære delen av A (inkl. diagonalen). Finn L^{-1}.

Hint: Den inverse av en nedre-triangulær Toeplitz-matrise er også en nedre-triangulær Toeplitz-matrise.

Hvis du ikke fant L^{-1} i **f)**, så kan du fra nå av bruke L^{-1} lik en Toeplitz-matrise med $1/(3d)$ på diagonalen og $-1/(9d)$ på underdiagonalen, og null ellers. Vær oppmerksom på at denne L^{-1} ikke er det korrekte svaret i **f)**.

g) I stedet for å bruke Jacobi-iterasjon, så bruker vi nå Gauss–Seidel-iterasjon. Hva er spektralradien til iterasjonsmatrisen brukt i Gauss–Seidel-iterasjonen?

Oppgave 2 Betrakt 2D Helmholtz-ligningen

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u - \alpha u &= f \quad \text{i} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ u &= 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

der α er en positiv konstant, og $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Ved hjelp av sentraldifferanser og basert på diagonaliseringsmetoden for 2D Poisson-ligningen[1], konstruer en diagonaliseringsmetode for å løse 2D Helmholtz-ligningen.

Oppgave 3

a) Forklar med noen få setninger hva et Krylov-underrom er og hva Arnoldi-prosessen gjør.

La $A = I + B$, der I er identitetsmatrisen og B er en skjev-symmetrisk matrise.

b) Betrakt Arnoldi-prosessen for A. Vis at den resulterende Hessenberg-matrisen har den tridiagonale formen

$$H_m = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 & & \\ \beta_2 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\beta_m \\ & & \beta_m & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Utnytt strukturen til matrisen $A = I + B$ til å vise at vi kan forenkle Arnoldi MGS (modifisert Gram–Schmidt) til:

$r_0 = b - Ax_0$, $\beta_1 = \|r_0\|_2$, $v_1 = r_0/\beta_1$, $v_0 = 0$
for $j = 1, \dots, m$ **do**
  $w_j = Bv_j + \beta_j v_{j-1}$
  $\beta_{j+1} = \|w_j\|_2$
  $v_{j+1} = w_j/\beta_{j+1}$
end for

Hint: Dette ligner på Lanczos-prosessen.

d) H_m kan LU-faktoriseres til

$$H_m = L_m U_m = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & -\beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_{m-1} & -\beta_m \\ & & & \eta_m \end{bmatrix}.$$

[1] Se notatet av E. Rønquist.

Bruk LU-faktoriseringen til å finne en algoritme som tilsvarer den direkte Lanczos-algoritmen (D-Lanczos), men anvendt på vår ikke-symmetriske matrise A.

Oppgave 4

a) Finn en singulærverdidekomposisjon (SVD) til

$$M = \begin{bmatrix} 48 & 36 & 20 \\ 36 & 27 & 15 \\ 20 & 15 & 75 \end{bmatrix}.$$

Hint: Singulærverdiene er heltall, og den største singulærverdien er dobbelt så stor som den nest største singulærverdien.

b) Hvordan er singulærverdiene og egenverdiene til M relatert?

c) Bruk SVD-en til å finne rangen til M.

d) Finn en approksimasjon $\tilde{M} \approx M$ slik at $\operatorname{rank} \tilde{M} = 1$, og $\|M - \tilde{M}\|_{\mathrm{F}}$ er minimal. Her er $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ Frobenius-normen.