Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK LINEÆR ALGEBRA (TMA4205)

Fredag 5. desember 2008
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 19.12.2008

Hjelpemidler: Kategori A, Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Oppgave 1 Den partielle differensialligningen

$$-u_{xx} + c\,u = f, \quad c \geq 0.$$

med homogene Dirichlet-betingelser, gir etter diskretisering med sentraldifferenser, et ligningssystem av typen $Au = b$ der $A = \mathrm{tridiag}(-1, 2+\gamma, -1)$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\gamma = c/(m+1)^2$. Vi finner at A har egenverdier

$$\lambda_k = \gamma + 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(m+1)}\right), \quad k = 1,\ldots,m,$$

og tilhørende egenvektorer

$$w_k = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{m+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{mk\pi}{m+1}\right) \end{bmatrix}.$$

a) Formuler vektet Jacobi-metode med relaksasjonsparameter ω for dette ligningssystemet, og vis at itererasjonen kan skrives på formen

$$u^{(q+1)} = G_\omega \, u^{(q)} + \frac{\omega}{2+\gamma} \, b \quad \text{der} \quad G_\omega = I - \frac{\omega}{2+\gamma} \, A,$$

og at iterasjonsmatrisen G_ω har egenverdier

$$\mu_k = 1 - \frac{\omega}{2+\gamma} \left(\gamma + 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(m+1)} \right) \right), \; k = 1, \ldots, m,$$

og de samme egenvektorene som A.

Svar: Vanlig Jacobi fins fra splittingen $A = M - N = 2 + \gamma I - ((2+\gamma)I - A)$ og dermed

$$(2+\gamma) \, u^{(q+1)} = ((2+\gamma)I - A)u^{(q)} + b$$

G_ω finnes ved å dividere med $(2+\gamma)$ på hver side.

Egenverdier og egenvektorer finnes fra

$$G_\omega w_k = (I - \frac{\omega}{2+\gamma} A) w_k = \left(1 - \frac{\omega}{2+\gamma} \lambda_k \right) \, w_k$$

der vi setter inn oppgitt λ_k.

b) Feilen etter q iterasjoner med vektet Jacobi på dette systemet kan skrives som

$$e^{(q)} = G_\omega^q \, e^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \mu_k^q w_k,$$

hvor

$$e^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \rho_k w_k$$

er startfeilen $e^{(0)}$ uttrykt ved egenvektorene w_k.

Bestem den verdien ω^{opt} av ω som best demper den øvre halvdelen av spekteret til feilen, dvs finn

$$\omega^{\text{opt}} = \arg \min_{\omega} \max_{k > \frac{m+1}{2}} |\mu_k|.$$

Verifiser at du får tilbake det kjente $\omega^{\text{opt}} = 2/3$ når $\gamma = 0$. Hva skjer når γ går mot uendelig?

Svar: Vi innfører variabelen $\theta = k/(m+1)$, og finner da at

$$\mu(\theta) = 1 - \frac{\omega}{2+\gamma} \left(\gamma + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \, \theta \right) \right)$$

$\mu(\theta)$ er en avtagende funksjon av θ, så min og max antas i endepunktene for det lukkede intervallet $\theta \in [1/2, 1]$. Vi konkluderer med at optimal ω fins når $\mu(1/2) = -\mu(1)$, det vil si

$$1 - \frac{\omega(\gamma+2)}{\gamma+2} = -\left(1 - \frac{\omega(\gamma+4)}{\gamma+2}\right)$$

som gir

$$\omega^{\text{opt}} = \frac{\gamma+2}{\gamma+3}$$

, så $\gamma = 0$ gir det kjente svaret $\omega^{\text{opt}} = 2/3$. Når γ øker vil ω^{opt} nærme seg verdien 1.

Oppgave 2

a) Beskriv kort ideen bak projeksjonsmetoder for løsning av lineære systemer $Ax = b$. Bruk anslagsvis 4-5 linjer.

Svar: Ideen er å definere et approksimasjonsrom $\mathcal{K}$ og et føringsrom $\mathcal{L}$ av samme dimensjon, og deretter kreve at for en gitt x_0 søker man x slik at

$$x - x_0 \in \mathcal{K}, \quad b - Ax \perp \mathcal{L}$$

Anta i resten av denne oppgaven at $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er symmetrisk positiv definitt, $b \in \mathbb{R}^n$ er en gitt høyreside, og $x = A^{-1}b$. Vi lar $r_k = b - Ax_k$ og $e_k = x - x_k = A^{-1}r_k$, for $k \geq 0$ og antar at x_0 er en gitt vektor.

b) Vi bruker approksimasjonsrom $\mathcal{K} = \text{span}\{v\}$ og føringsrom $\mathcal{L} = \mathcal{K}$. La x_1 være resultatet av ett skritt med projeksjonsmetoden. Vis at

$$\langle Ae_1, e_1\rangle = \langle Ae_0, e_0\rangle - \langle r_0, v\rangle^2/\langle Av, v\rangle.$$

Svar: Metoden blir

$$x_1 = x_0 + \frac{\langle r_0, v\rangle}{\langle Av, v\rangle} v \quad \Rightarrow \quad e_1 = e_0 - \frac{\langle r_0, v\rangle}{\langle Av, v\rangle} v$$

Siden $r_1 \perp v$ blir

$$\langle Ae_1, e_1\rangle = \langle r_1, e_1\rangle = \langle r_1, e_0\rangle = \langle Ae_0, e_0\rangle - \frac{\langle r_0, v\rangle}{\langle Av, v\rangle}\langle Av, e_0\rangle = \langle Ae_0, e_0\rangle - \frac{\langle r_0, v\rangle^2}{\langle Av, v\rangle}$$

I siste overgang har vi brukt at A er symmetrisk.

c) Metoden fra forrige punkt sier ingenting om hvordan ny søkeretning, v, velges i hver iterasjon. La oss derfor nå innføre følgende prinsipp: Velg v_k slik at $\langle v_k, r_k\rangle = \|r_k\|_1$, det vil si, la komponentene i v_k være 1 og -1, negativ (-1) hvis tilsvarende komponent i r_k er negativ, og positiv $(+1)$ hvis r_k-komponenten er ≥ 0. Vis at

$$\|e_{k+1}\|_A \leq \left(1 - \frac{1}{n\kappa(A)}\right)^{1/2} \|e_k\|_A.$$

Here er $\kappa(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$ mens $\|w\|_A = \langle Aw, w\rangle^{1/2}$.

Svar: En omskrivning av resultatet fra forrige punkt gir

$$\|e_{k+1}\|_A^2 = \left(1 - \frac{\langle r_k, v_k\rangle^2}{\langle Av_k, v_k\rangle\langle Ae_k, e_k\rangle}\right) \|e_k\|_A^2$$

Innfør nå at $\langle r_k, v_k\rangle = \|r_k\|_1 \geq \|r_k\|_2$, og at

$$\langle Av_k, v_k\rangle\,\langle Ae_k, e_k\rangle = \langle Av_k, v_k\rangle\,\langle r_k, A^{-1}r_k\rangle \leq \|A\|_2\|A^{-1}\|_2\|v_k\|_2^2\|r_k\|_2^2 = n\,\kappa(A)\,\|r_0\|_2^2$$

Vi får dermed at

$$\frac{\langle r_k, v_k\rangle^2}{\langle Av_k, v_k\rangle\langle Ae_k, e_k\rangle} \geq \frac{\|r_k\|_2^2}{n\kappa(A)\|r_k\|_2^2} = \frac{1}{n\kappa(A)}$$

og vi får som ønsket at

$$\|e_{k+1}\|_A^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n\kappa(A)}\right) \|e_k\|_A^2$$

Oppgave 3 La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \qquad |\varepsilon| \leq 1.$$

a) Gi et estimat for egenverdiene til A ved å bruke Gerschgorin's teorem. Oppgi spesielt hva en kan si om den minste egenverdien. Illustrer gjerne med en tegning.

Svar: Alle tre Gerschgorin-sirkler er disjunkte, dessuten er matrisen symmetrisk, så egenverdiene er reelle. Vi finner at egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ oppfyller

$$7 \leq \lambda_1 \leq 9, \quad 3 - \varepsilon \leq \lambda_2 \leq 5 + \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon \leq \lambda_3 \leq 1 + \varepsilon.$$

Spesielt er minste egenverdi mellom $1 - \varepsilon$ og $1 + \varepsilon$.

b) Vis, for eksempel ved å bruke en passende diagonal similærtransform, det skarpere estimatet $|\lambda_3 - 1| \le \varepsilon^2$ for den minste egenverdien til A.

Svar: Vi similærtransformerer med $T = \mathrm{diag}(1, 1, \varepsilon)$ og

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$$

og den tredje Gerschgorindisken blir fremdeles disjunkt fra de andre når $|\varepsilon| \le 1$, og inneholder dermed en egenverdi.

c) For $\varepsilon = 0.1$ har man funnet Q og R slik at $A - I = QR$ der

$$Q = \begin{bmatrix} -0.9899 & 0.1413 & 0.0050 \\ -0.1414 & -0.9893 & -0.0350 \\ 0 & -0.0353 & 0.9994 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -7.0711 & -1.4142 & -0.0141 \\ 0 & -2.8302 & -0.0989 \\ 0 & 0 & -0.0035 \end{bmatrix}.$$

Finn en approksimasjon til minste egenverdi til A fra dette.

Svar: Vi kan enkelt utføre én iterasjon med skiftet QR-metode, vi trenger kun å bestemme $(3, 3)$-elementet i $A_1 = RQ + I$ som blir

$$1 + (-0.0035) \cdot 0.9994 = 0.9965,$$

Svaret er korrekt i alle 4 sifre.

Oppgave 4

a) Finn singulærverdidekomposisjonen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svar:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

b) Matrisen i forrige punkt er et spesialtilfelle av en matrise $B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ der $B_{k,k} = 1$, $B_{k+1,k} = -1$ for $k = 1, \ldots, n$ og der alle andre elementer i B er null. Bestem singulærverdidekomposisjonen til B.

Svar: Skal finne U, V, Σ slik at $B = U\Sigma V^T$. Her finner vi at $B^T B = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$ som vi kjenner egenverdiene til, de er nemlig

$$\sigma_k^2 = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_k = 2\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Matrisen V har egenvektorerene til $B^T B$ som kolonner, de er også kjent, men vi må huske å skalere dem slik at de får euklidsk norm 1.

$$\|w_k\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \sin^2\left(\frac{jk\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{n+1}{2}$$

Så kolonne k i V blir

$$v_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \end{bmatrix}.$$

For å finne kolonne k i U setter vi $u_k = \frac{1}{\sigma_k} B v_k$. Komponent ℓ av u_k blir dermed (vi ser foreløpig bort fra faktoren $\sqrt{2/(n+1)}$)

$$\frac{1}{\sigma_k}\left(\sin\left(\frac{k\ell\pi}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{k(\ell-1)\pi}{n+1}\right)\right)$$

Her kunne vi gitt oss, men det er faktisk her hele moroa starter. Om vi setter

$$\phi = \frac{k(\ell - 1/2)\pi}{n+1}, \quad \delta = \frac{k\pi/2}{n+1} \quad \Rightarrow \sigma_k = 2\sin\delta$$

så blir uttrykket ovenfor

$$\frac{1}{\sigma_k}\left(\sin(\phi+\delta) - \sin(\phi-\delta)\right) = \cos\phi \frac{2\sin\delta}{\sigma_k} = \cos\phi = \cos\left(\frac{k(\ell-1/2)\pi}{n+1}\right)$$

Dermed har vi følgende elegante uttrykk for kolonne k i U

$$u_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{k\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi}{n+1}\right) \\ \cos\left(\frac{k\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{k\cdot(n+\frac{1}{2})\cdot\pi}{n+1}\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$