Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen
Navn: Brynjulf Owren (93021641)
Sensur: 21.12.2009

EKSAMEN I NUMERISK LINEÆR ALGEBRA (TMA4205)

Mandag 30. november, 2009
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Kategori A, Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt. Alle typer kalkulatorer er tillatt.

Oppgave 1 Gitt matrisen

$$A = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} -9 & 32 & -62 \\ -72 & 67 & -34 \\ -18 & 106 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Fyll inn $\mu_i, \nu_i,\ i = 1, 2, 3$ og σ_3 slik at produktet

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & \mu_1 \\ 2/3 & -1/3 & \mu_2 \\ 2/3 & 2/3 & \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 3 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/7 & 6/7 & -2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix}$$

er en singulærverdidekomposisjon av A.

b) Vi definerer følgende mengde av matriser

$$\mathcal{M} = \{a_1 b_1^T + a_2 b_2^T,\ a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^3\}$$

Bestem

$$\tilde{A} = \arg \min_{B \in \mathcal{M}} \|A - B\|_2$$

der A er matrisen definert ovenfor.

Oppgave 2 La oss definere skiftmatrisen $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ som

$$S = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}, \tag{1}$$

matrisen med 1 i første subdiagonal og i øvre høyre hjørne, og 0 ellers. Effekten av å anvende denne matrisen på en vektor er at komponentene forskyves en posisjon ned og den siste flyttes opp som første komponent. Åpenbart er S ortogonal slik at $S^{-1} = S^T$ og dermed blir løsning av problemet $Sx = b$ trivielt. Men likevel skal vi bruke dette lineære systemet som et testeksempel for Krylovrom-metoder.

a) Bevis at egenverdiene til S er n'te røtter av 1, det vil si

$$\lambda_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k = 1, \dots, n, \ (\mathrm{i} = \sqrt{-1}).$$

b) La $v_1 = e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$ og for hver $m = 1, \dots, n$ utled eksplisitt matrisene V_m og H_m fra Arnoldi-algoritmen slik at kolonnene i V_m danner en ortonormal basis for $\mathcal{K}(S, e_1)$.

c) La oss nå bruke GMRES-metoden for å løse det lineære systemet $Sx = b$. Vi antar at en initialtilnærmelse x_0 er valgt på en slik måte at $r_0 = b - Sx_0 = e_1$. Beregn alle approksimasjoner x_m, $m = 1, \dots, n$. Vis hvordan hvert enkelt residual r_m kan uttrykkes som $r_m = p_m(S)r_0$ for et polynom $p_m(z)$ av grad høyst m, og bestem hver enkelt $p_m(z)$ for $m = 1, \dots, n$. Drøft hvorfor den vanlige konvergensanalysen som er presentert i boka og på forelesningene ikke fungerer i dette tilfellet. Diskuter spesielt hva som skjer i den aller siste iterasjonen ($m = n$).

d) Hva skjer om vi bytter ut GMRES med full ortogonaliseringsmetode (FOM).

Oppgave 3 Vi skal nå betrakte matrisen $A = I + \theta S$, $|\theta| < 1$, der S er skiftmatrisen definert ved (1). Du kan få bruk for resultatet i appendiks (se nedenfor) i denne oppgaven.

a) Argumenter for at det eksisterer en diagonalmatrise $\Lambda = \Lambda(\theta) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ og en unitær matrise $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, uavhengig av θ, slik at $A = X\Lambda X^H$.

b) Vi ser nærmere på løsning av ligningen $Ax = b$, med GMRES. Utled et estimat for the konvergens av residualet etter m iterasjoner på formen

$$\|r_m\|_2 \leq \epsilon^{(m)}(\theta)\, \|r_0\|_2, \tag{2}$$

det vil si, bestem $\epsilon^{(m)}(\theta)$.

c) Anta at vi bruker en prekondisjonerer, $B^{-1} = I - \theta S$ og betrakt systemet

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b$$

Finn det tilsvarende konvergensestimatet som i (2), som man får ved å erstatte A by $B^{-1}A$.

Oppgave 4 Gitt en vilkårlig 2×2 reell symmetrisk matrise skrevet på formen

$$A = \begin{bmatrix} w+z & \varepsilon \\ \varepsilon & z \end{bmatrix}.$$

a) Utfør følgende skiftet QR-steg: $A - zI = QR,\ \bar{A} = RQ + I$. Vis at

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{w}+\bar{z} & \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} & \bar{z} \end{bmatrix}, \qquad \bar{z} = z - \frac{\varepsilon^2 w}{w^2+\varepsilon^2}, \quad \bar{w} = w + 2\,\frac{\varepsilon^2 w}{w^2+\varepsilon^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^3}{w^2+\varepsilon^2}.$$

b) Hva forteller resultetet i forrige punkt deg om konvergens av QR-iterasjoneen for denne type av matriser? Hva skjer med konvergensraten hvis $w \leq \varepsilon$? Tegn Gerschgorin-sirklene for A in tilfelle $w = \varepsilon$ og kommenter hvordan dette resultatet stemmer med du generelt vet om konvergens av QR-iterasjonen.

Appendix. En versjon av Zarantonello's lemma (Saad, Lemma 6.26). La $C(c,\rho)$ være en sirkel sentrert i c med radius ρ der $\rho < |c|$. Da gjelder

$$\min_{p \in \mathbb{P}_m,\ p(0)=1}\ \max_{z \in C(c,\rho)} |p(z)| = \left(\frac{\rho}{|c|}\right)^m$$