Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen
Navn: Bawfeh Kingsley Kometa (kontor: 73591975, mobil: 936 24 483)
Sensur: 06.01.2011

EKSAMEN I NUMERISK LINEÆR ALGEBRA (TMA4205)

Torsdag 9. desember, 2010
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Kode C. Følgende trykte/håndskrevne hjelpemidler er tillatt

- Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2. utgave.
- Trefethen and Bau, Numerical linear algebra *eller* Notater fra samme bok utlagt på hjemmesiden til faget
- Golub and Van Loan, Matrix Computations *eller* Notat fra samme bok utlagt på hjemmesiden til faget
- Egne forelesningsnotater fra kurset

Oppgave 1 En matrise $A \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ skal QR-faktoriseres. Etter å ha utført én Householder-transformasjon med matrisen Q_1 generert av v har man funnet

$$A_2 = Q_1 A = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}, \quad v = \frac{w}{\|w\|_2}, \quad w = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

a) Bestem A når det oppgis at $2\dfrac{w^T A_2}{w^T w} = [-1, \frac{8}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{9}{5}]$.
Hint for å kontrollere svaret: A har kun heltallige elementer.

Svar: Bruk at Householdertransformasjoner er sin egen invers, så $A = Q_1^{-1}A_2 = Q_1 A_2$. Vi må altså finne $(I - 2vv^T)A_2$

$$= A_2 - 2w\frac{w^T A_2}{w^T w} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot [-1, \frac{8}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{9}{5}] = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Bestem den øvre-triangulære matrisen R slik at $A = QR$, bruk Householdertransformasjoner og oppgi vektorene v_2 og v_3 som genererer Q_2 og Q_3. Du skal ikke beregne Q.

Hint for å kontrollere svaret: Elementene i R er heltall som er delelige med 7.

Svar: Vi starter med å sette $x = A_2(2:4, 2) = 7 \cdot [0, -3/5, -4/5]^T$ og bruker formelen $v = w/\|w\|_2$ der $w = x + \text{sign}(x_1)\|x\|$. Siden $\|x\|_2 = 7$ får vi dermed at $w = 7 \cdot [1, -3/5, -4/5]^T := 7 \cdot \tilde{w}$, slik at $\tilde{w}^T\tilde{w} = 2$. La $\tilde{A}_2 = A_2(2:4, 2:4)$, vi gjør kun endring på denne delen av A_2 for å finne A_3. En har $\tilde{Q}_2\tilde{A}_2 = (I - 2vv^T)\tilde{A}_2$

$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_2 - 2\frac{ww^T}{w^T w}\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2 - 2\tilde{w}\frac{\tilde{w}^T\tilde{A}_2}{\tilde{w}^T\tilde{w}} = \tilde{A}_2 - \tilde{w}\tilde{w}^T\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2 - 7\tilde{w} \cdot [1, 0, 0]$$

Dermed er

$$\tilde{A}_3 = 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix} - 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

En kan bruke for Householder, $v_2 = \sqrt{1/2}\,[1, -3/5, -4/5]^T$.

Vi fortsetter på samme måte og definerer $\tilde{\tilde{A}}_3 = \tilde{A}_3(2:3, 2:3)$. Setter $x = 7 \cdot [3/5, 4/5]^T$, finner $\|x\|_2 = 7$, og dermed $w = 7 \cdot [3/5 + 1, 4/5]^T = 28 \cdot [2/5, 1/5]^T = 28 \cdot \tilde{w}$, der $\tilde{w}^T\tilde{w} = 1/5$. Samme type utregning som ovenfor gir

$$\tilde{A}_4 = 7 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi fyller inn disse matrisene i hverandre og får

$$R = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En kan definere $v_3 = \sqrt{1/5} \cdot [2, 1]^T$.

Oppgave 2 Vi skal benytte en projeksjonsmetode for å approksimere løsningen av ligningssystemet

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in \mathbb{R}^n$$

Til dette benyttes et søkerom $\mathcal{K}$ og et føringsrom $\mathcal{L}$, begge av dimensjon $m \le n$. For en gitt startverdi x_0 søker vi en approksimasjon $\tilde{x} \in x_0 + \mathcal{K}$ slik at $\tilde{r} \perp \mathcal{L}$, dvs $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ er ortogonal på alle vektorene i $\mathcal{L}$.

a) La oss anta at vi kan skrive $\mathcal{L} = B\mathcal{K}$ for en ikke-singulær $n \times n$-matrise B. Vis at dersom $(Ax, Bx) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ så er denne metoden veldefinert, dvs det eksisterer en entydig $\tilde{x} \in x_0 + \mathcal{K}$ slik at $\tilde{r} \perp \mathcal{L}$.

Svar: Vi innfører en basis for $\mathcal{K}$ som kolonnene i $n \times m$-matrisen $V_m = [v_1|\cdots|v_m] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vektorene $w_j = Bv_j, j = 1, \ldots, m$ danner da et lineært uavhengig sett i $\mathcal{L}$, og vi kan ta dette som basis, vi setter $W_m = [w_1|\cdots|w_m] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Enhver vektor $\tilde{x}$ i $x_0 + \mathcal{K}$ må kunne skrives på formen $\tilde{x} = x_0 + V_m y$, $y \in \mathbb{R}^m$. Vi har

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = b - Ax_0 - AV_m y = r_0 - AV_m y.$$

Vi krever at $\tilde{r} \perp \mathcal{L}$ som er ekvivalent med at $w_j \perp \tilde{r},\ r = 1, \ldots, m$ eller $W_m^T \tilde{r} = 0$. Dette gir

$$(BV_m)^T (r_0 - AV_m y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_m^T B^T A V_m) y = V_m^T B^T r_0$$

En entydig løsning eksisterer hvis og bare hvis $P = V_m^T B^T A V_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ er ikke-singulær. En tilstrekkelig betingelse for dette er at P er positiv definitt, dvs $z^T P z > 0\ \forall z \in \mathbb{R}^m$. Vi viser at den er nettopp det under antagelsen $(Ax, Bx) > 0$. Vi har

$$z^T P z = z^T V_m^T B^T A V_m z = (Bx)^T (Ax) = (Ax, Bx) > 0, \qquad x = V_m z.$$

b) Anta nå at B velges slik at $C := BA^{-1}$ er symmetrisk positiv definitt. Vis at resultatet $\tilde{x}$ vil oppfylle

$$\|b - A\tilde{x}\|_C = \min_{y \in x_0 + \mathcal{K}} \|b - Ay\|_C$$

der $\|\cdot\|_C$ er vektornormen på $\mathbb{R}^n$ definert ved $\|v\|_C = \sqrt{v^T C v}$.

Svar: Først en liten kommentar. At en slik B eksisterer ser vi for eksempel ved å ta kandidatene $B = I$ eller $B = A$ der vi har antatt at A er ikke-singulær. La oss nå perturbere den oppgitte kandidaten, ved å sette $y = \tilde{x} + \delta,\ \delta \in \mathcal{K}$ og så studere $\|b - Ay\|_C$

$$\|b - Ay\|_C^2 = \|b - A\tilde{x} - A\delta\|_C^2 = (\tilde{r} - A\delta)^T C (\tilde{r} - A\delta) = \|\tilde{r}\|_C^2 + \|A\delta\|_C^2 - 2\tilde{r}^T BA^{-1} A\delta.$$

Vi merker oss at det siste leddet forsvinner fordi $\tilde{r} \perp B\delta$ siden $B\delta \in \mathcal{L}$. Derfor er

$$\|b - Ay\|_C \ge \|\tilde{r}\|_C$$

og likhet krever $A\delta = 0$ som igjen krever $\delta = 0$ dvs $y = \tilde{x}$.

c) La oss nå anta at A er symmetrisk slik at egenverdiene er reelle. La $\lambda_{\min}$ og $\lambda_{\max}$ være henholdsvis minste og største egenverdi til A. Vi setter også $B = (1-\mu)I + \mu A$. Vis at antagelsene i forrige punkt er oppfylt, dvs at $C = BA^{-1}$ er SPD hvis og bare hvis

$$\mu < \frac{1}{1-\lambda_{\min}} \quad \text{hvis } \lambda_{\min} < 1 \qquad \text{og} \qquad \mu > \frac{1}{1-\lambda_{\max}} \quad \text{hvis } \lambda_{\max} > 1.$$

Vi mener med dette at første ulikhet ignoreres hvis $\lambda_{\min} \geq 1$ og andre ulikhet ignoreres hvis $\lambda_{\max} \leq 1$.

Svar: Vi finner nå at

$$C = BA^{-1} = ((1-\mu)I + \mu A)A^{-1} = (1-\mu)A^{-1} + \mu I$$

C er åpentbart symmetrisk hvis A er symmetrisk. Når det gjelder egenverdiene til C har vi

$$\lambda(C) = \frac{1-\mu}{\lambda(A)} + \mu$$

og vi behøver kun å forlange at de alle er positive. For de egenverdiene til A som er større enn 1, blir det den største av dem, nemlig $\lambda_{\max}$ som gir det strengeste kravet, mens for de som er mindre enn 1 er det den minste, $\lambda_{\min}$ som definerer kravet.

Oppgave 3 I denne oppgaven skal vi studere nærmere splittingsmetodens egenskaper som prekondisjonerere.

a) La A være en ikke-singulær kvadratisk matrise. Vi starter med å anta at man ønsker å approksimere løsningen av ligningen $Ae = r$ ved å benytte k iterasjoner med en splittingsmetode og at man setter initialvektoren $e^{(0)} = 0$. Anta først en generell splitting $A = D - N$, D inverterbar, og en iterasjon av formen

$$\mathrm{e}^{(k+1)} = G\mathrm{e}^{(k)} + \bar{r}, \qquad G = D^{-1}N, \quad \bar{r} = D^{-1}r$$

Vis at en kan skrive $\mathrm{e}^{(k)} = (I-G)^{-1}(I-G^k)\bar{r}$, og at hvis det tilsvarende prekondisjonerte systemet er $\tilde{A}x = M^{-1}Ax = M^{-1}b$ så gjelder at

$$\tilde{A} = M^{-1}A = (I-G)^{-1}(I-G^k)(I-G).$$

Svar: Vi kan bruke induksjonsbevis. At $\mathrm{e}^{(1)} = \bar{r}$ ser vi direkte fra iterasjonsformelen med $k = 0$, siden $\mathrm{e}^{(0)} = 0$. Hvis formelen er korrekt opp $k-1$ så kan vi finne $\mathrm{e}^{(k)}$ ved

$$\mathrm{e}^{(k)} = G\mathrm{e}^{(k-1)} + \bar{r} = (I + G(I-G)^{-1}(I-G^{k-1}))\bar{r} = (I-G)^{-1}(I-G+G(I-G^{k-1}))\bar{r} = (I-G)^{-1}(I-G^k)\bar{r}$$

For å finne uttrykket for $\tilde{A}$ må vi sette inn $\bar{r} = D^{-1}r$ samt bruke at $A = D(I-G)$.

$$\tilde{A} = M^{-1} \cdot A = (I-G)^{-1}(I-G^k)D^{-1} \cdot (D-N) = (I-G)^{-1}(I-G^k)(I-G)$$

b) Anta i resten av denne oppgaven at A er symmetrisk positiv definitt (SPD) av formen $A = \alpha I - N$, $N^T = N$, $\alpha > \frac{1}{2}\lambda_{\max}$, der $\lambda_{\max} = \rho(A)$ er den største egenverdien til A. La $D = \alpha I$. Vis at prekondisjonereren M fra forrige punkt da også vil være SPD

Svar: Vi har $M^{-1} = (I-G)^{-1}(I-G^k)D^{-1} = \frac{1}{\alpha}(I-G)^{-1}(I-G^k)$ der $G = \frac{1}{\alpha}N$ er symmetrisk. Derfor er både $(I-G)^{-1}$ og $I-G^k$ symmetriske og vi har $M^{-T} = (I-G^k)(I-G)^{-1} = (I-G)^{-1}(I-G^k) = M^{-1}$, så M^{-1} (og dermed M) er symmetrisk.

Nå er $\lambda(G) = 1 - \dfrac{\lambda(A)}{\alpha}$ slik at

$$\lambda(M^{-1}) = \frac{1}{\alpha}(1-\lambda(G))^{-1}(1-\lambda(G)^k) = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha}{\lambda(A)}\left(1 - \left(1 - \frac{\lambda(A)}{\alpha}\right)^k\right)$$

Så $\lambda(M^{-1}) > 0$ hvis $1 - \left(1 - \frac{\lambda(A)}{\alpha}\right)^k > 0$. Siden $\alpha > \frac{1}{2}\lambda_{\max}$ må vi ha $-1 < 1 - \frac{\lambda(A)}{\alpha} < 1$ for alle egenverdiene til A, og dermed $-1 < (1 - \frac{\lambda(A)}{\alpha})^k < 1$, og det følger at $1 - \left(1 - \frac{\lambda(A)}{\alpha}\right)^k > 0$ og dermed $\lambda(M^{-1}) > 0$, så M^{-1} (og dermed M) er SPD.

c) Anta fremdeles at A er SPD, og at minste og største egenverdi til A er henholdsvis $\lambda_{\min}$ og $\lambda_{\max}$. Vi velger splittingsparameteren $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ slik at prekondisjonereren blir SPD. La oss anta at vi benytter k iterasjoner av splittingsmetoden der k er et odde heltall. Vis at under disse omstendighetene gjelder

$$\kappa_2(\tilde{A}) = \frac{1 + \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k}{1 - \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k}$$

der $\kappa = \kappa_2(A)$ er kondisjonstallet til A.

Kommenter resultatet.

Svar: Kondisjonstallet til A er gitt som $\kappa = \kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$. La $\tilde{\lambda} \in \sigma(\tilde{A})$. Siden $\tilde{A} = (I-G)^{-1}(I - G^k)(I-G)$ så er $\tilde{\lambda} \in \sigma(I - G^k)$. Fordi $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ har vi

$$\tilde{\lambda} = 1 - \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}\right)^k, \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Man kan se at dette uttrykket er monotont voksende i λ for eksempel ved å derivere:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\tilde{\lambda} = \frac{2k}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}\right)^{k-1}$$

Siden k er odde, blir $k-1$ like og uttrykket er garantert ikke-negativt. Dermed blir minimum oppnådd for $\lambda = \lambda_{\min}$ og maksimum for $\lambda = \lambda_{\max}$. Vi beregner

$$\kappa_2(\tilde{A}) = \frac{\tilde{\lambda}_{\max}}{\tilde{\lambda}_{\min}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{2\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{2\lambda_{\min}}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}\right)^k} = \frac{1 + \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k}{1 - \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k}$$

Oppgave 4

a) Vis at Frobenius-normen til en $n \times n$-matrise A er gitt som

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2},$$

der $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ er singulærverdiene til A.

Svar: Frobeniusnormen til A kan skrives som

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$$

Man benytter oppgitt informasjon om at trasen til en matrise er summen av dens egenverdier, samt at kvadratet av singulærverdiene til A er egenverdiene til $A^T A$, resultatet følger deretter.

b) Anta at A er en 202×202-matrise med $\|A\|_2 = 100$ og $\|A\|_F = 101$. Finn ut fra dette en størst mulig nedre skranke for $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$.

Svar: Her benytter vi oss av svaret fra forrige punkt. Merk at $\|A\|_2 = \sigma_1$ dvs største singulærverdi, mens $\|A^{-1}\|_2 = 1/\sigma_n$ dvs invers av minste singulærverdi, her er $n = 202$. En finner

$$201 = 101^2 - 100^2 = \|A\|_F^2 - \|A\|_2^2 = \sum_{k=2}^{202} \sigma_k^2 \geq 201 \cdot \sigma_{202}^2$$

slik at $\sigma_{202} \leq 1$. Dermed blir

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{202}} \geq \frac{100}{1} = 100.$$

Appendix. Noen nyttige oppgitte formler

1. For alle kvadratiske $n \times n$-matriser C med elementer c_{ij} og egenverdier λ_i gjelder at

$$\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

2. Kondisjonstallet til en matrise A er gitt som $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Spesielt med bruk at p-norm har man $\kappa_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$