Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Sett instituttnavn med \institutt-kommandoen

Faglig kontakt under eksamen:
Elena Celledoni, tlf. 93541

EKSAMEN I FAG TMA4205 NUMERISK LINEÆR ALGEBRA

Fredag 8. desember 2006
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: A – Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler er tillatt.
Alle kalkulatorer er tillatt.

Oppgave 1

a) Vis at inverse av matrisen

$$I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

der I er $n \times n$ identitets matrise og $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ og $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq 1$, er av type

$$I + \gamma \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

Finn γ.

b) Estimer kondisjonstallet $\mathcal{K}_2(I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)$ ved bruk av $\|\mathbf{u}\|_2$ og $\|\mathbf{v}\|_2$. Anta $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq 1$.

c) Anta vi skal løse det $n \times n$ lineære systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad A = B - \mathbf{w}\mathbf{z}^T, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n, \, \mathbf{w} = B\mathbf{z}$$

der B stammer fra diskretisering av en Laplace-operator, for eksempel, med endelige differanse eller endelige elementermetoden. Anta at n er stor, at B er inverterbar, og at vi kan bruke en multigrid V- eller W-syklus for effektiv løsning av lineære systemer av typen $B\mathbf{y} = \mathbf{c}$. Vi skal dermed bruke B^{-1} som prekondisjonerer i vårt problem.

Finn kravene som $\mathbf{z}$ må tilfredsstille for å garantere at konjugerte gradienters algoritme konvergerer når den anvendes på det prekondisjonerte systemet

$$B^{-1}A\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{b}.$$

Anta $\|\mathbf{z}\|_2 \leq 0.5$, bruk konvergensestimatet for konjugerte gradienters algoritme og estimatet av $K_2(I - \mathbf{z}\mathbf{z}^T)$ for å finne minimum antall iterasjoner som trenges for å garantere at

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\|_{B^{-1}A}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{B^{-1}A}} \leq 10^{-3}.$$

d) Bruk resultatet fra punkt **a**) og finn en algoritme for å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som fungerer for alle $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ som er slik at A er inverterbar.

e) Anta at B er en $n \times n$-matrise som stammer fra en diskretisering av Helmholtz-ligningen med periodiske randbetingelser, dvs

$$\alpha u(x) + \Delta u(x) = \psi(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad u(-\pi) = u(\pi), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

der Δ er Laplace-operatoren. Etter diskretisering ved spektralmetoden har vi at

$$B = \tilde{\Omega}^H \Lambda \tilde{\Omega}, \qquad \tilde{\Omega}^H \tilde{\Omega} = I,$$

der Λ er en diagonalmatrise. Vi antar at n er et partall. Diagonalen til Λ er

$$[\alpha, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 1, \ldots, \alpha + (k-1)^2, \alpha + (k-1)^2, \alpha + k^2, \alpha + k^2],$$

med $k = n/2 - 1$. Den unitære matrisen $\tilde{\Omega}$ er slik at $\tilde{\Omega} = P\Omega P^T$ der P er en permutasjonsmatrise og Ω er Fourier-matrisen. Bevis at diagonalelementene i matrisen B er

$$B_{j,j} = \frac{2 \cdot \alpha}{n} + \frac{n^2 - 3n + 2}{12}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Hint. Merk at matrisen $\tilde{B} = \Omega^H (P^T \Lambda P) \Omega$ er syklisk og symmetrisk. Finn diagonalelementene til $\tilde{B}$. Vis at $\tilde{B}$ og B har de samme diagonalelementene.

Oppgitt. En permutasjonsmatrise er en matrise som man får ved en permutasjon av radene/kolonnene av identitetsmatrisen.
Fourier-matrisen Ω har elementer

$$\Omega_{p,l} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}(p-1)(l-1)\right), \quad i = \sqrt{-1}, \quad p, l = 1, \ldots, n.$$

Egenverdiene til en syklisk matrise er komponentene til vektoren

$$\mathbf{g} = \sqrt{n} \cdot \Omega^H \tilde{\mathbf{b}},$$

der $\tilde{\mathbf{b}}^T$ er første rad i $\tilde{B}$.
Husk at

$$\sum_{l=1}^{m} l^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

f) Betrakt vektet Jacobi-iterasjon for å løse $B\mathbf{y} = \mathbf{c}$, d.v.s.

$$\mathbf{y}^{m+1} = (1-\omega)\mathbf{y}^m + \omega D^{-1}(E+F)\mathbf{y}^m + \omega D^{-1}\mathbf{c},$$

$B = D - E - F$ der D er diagonal og E er nedretriangulær og F øvretriangulær, og $0 < \omega \leq 1$ er relaksasjonsparameteren.

Vis at iterasjonen kan skrives som

$$\mathbf{y}^{m+1} = G_\omega \mathbf{y}^m + \omega D^{-1}\mathbf{c},$$

bruk dette til å vise at egenverdiene til G_ω er

$$\mu_j = 1 - \omega \frac{12 \cdot \lambda_j}{n^2 - 3n + 2 + 24\alpha/n}, \quad j = 1, \ldots, n$$

der λ_j er egenverdiene til B, dvs

$$\lambda_j = \begin{cases} \alpha + (\frac{j}{2} - 1)^2, & \text{hvis} \quad j \quad \text{er} \quad \text{partall}, \\ \alpha + (\frac{j+1}{2} - 1)^2, & \text{hvis} \quad j \quad \text{er} \quad \text{oddetall}. \end{cases}$$

g) Undersøk glattingsegenskapene til vektet Jacobi. Uttrykk startfeilen $\mathbf{e}^0 = \mathbf{y} - \mathbf{y}^0$ som

$$\mathbf{e}^0 = \sum_{j=1}^{n} f_j w_j,$$

der w_j er kolonnene til matrisa $\tilde{\Omega}$. Finn den tilsvarende formelen for feilen $\mathbf{e}^m = \mathbf{y} - \mathbf{y}^m$ ved bruk av koeffisientene f_j og egenverdiene og egenvektorene til G_ω. Bestem ω som gir best demping av høyfrekvente feilmoder ut fra betingelsen $-\mu_{n/2} = \mu_n$.

Oppgave 2

Vi skal se på sensitivitet med hensyn til avrundingsfeil i systemet $AXC = B$ der A er en reell $n \times n$ inverterbar matrise, X er en reell $n \times p$-matrise, C er en reell $p \times p$ inverterbar matrise og B er $n \times p$-matrise, med $n \geq p$. Betrakt det perturberte systemet

$$(A + \varepsilon \Delta A)X(\varepsilon)(C + \varepsilon \Delta C) = B + \varepsilon \Delta B.$$

Finn en øvre skranke til den relative feilen,

$$\frac{\|X(\varepsilon) - X\|_2}{\|X\|_2},$$

ved bruk av den relative feilen i inputdata A, B og C og kondisjonstallet til A og C.

Oppgave 3
Betrakt Arnoldis algoritme for å beregne en ortonormal basis til Krylov-rommet

$$K_m(A, \mathbf{u}_0) = \mathrm{span}\{\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_0, \ldots, A^{m-1}\mathbf{u}_0\},$$

der A er en $n \times n$-matrise og $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{R}^n$. Egenverdiene til Arnoldis øvre Hessenbergmatrise, $V_m^T A V_m = H_m$, kan beregnes effektivt for eksempel ved bruk av en skiftet QR iterasjonsalgoritme. Forklar hvorfor.

Anta at ν_k er en egenverdi til H_m og $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$ er den tilsvarende normerte egenvektoren. Betrakt ν_k som approksimasjon til en egenverdi til A og $V_m\mathbf{y}_k$ som approximasjon til den tilhørende egenvektoren. Finn en feilskranke for

$$\|AV_m\mathbf{y}_k - \nu_k V_m\mathbf{y}_k\|_2.$$

Bruk kjente resultater om Arnoldis algoritme til formålet.