Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK LINEÆR ALGEBRA (TMA4205)

Fredag 5. desember 2008
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 19.12.2008

Hjelpemidler: Kategori A, Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Oppgave 1 Den partielle differensialligningen

$$-u_{xx} + c\,u = f, \quad c \geq 0.$$

med homogene Dirichlet-betingelser, gir etter diskretisering med sentraldifferenser, et ligningssystem av typen $Au = b$ der $A = \mathrm{tridiag}(-1, 2+\gamma, -1)$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\gamma = c/(m+1)^2$. Vi finner at A har egenverdier

$$\lambda_k = \gamma + 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(m+1)}\right), \quad k = 1, \ldots, m,$$

og tilhørende egenvektorer

$$w_k = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{m+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{mk\pi}{m+1}\right) \end{bmatrix}.$$

a) Formuler vektet Jacobi-metode med relaksasjonsparameter ω for dette ligningssystemet, og vis at itererasjonen kan skrives på formen

$$u^{(q+1)} = G_\omega \, u^{(q)} + \frac{\omega}{2+\gamma} \, b \quad \text{der} \quad G_\omega = I - \frac{\omega}{2+\gamma} A,$$

og at iterasjonsmatrisen G_ω har egenverdier

$$\mu_k = 1 - \frac{\omega}{2+\gamma} \left(\gamma + 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(m+1)} \right) \right), \quad k = 1, \ldots, m,$$

og de samme egenvektorene som A.

b) Feilen etter q iterasjoner med vektet Jacobi på dette systemet kan skrives som

$$e^{(q)} = G_\omega^q \, e^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \mu_k^q w_k,$$

hvor

$$e^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \rho_k w_k$$

er startfeilen $e^{(0)}$ uttrykt ved egenvektorene w_k.

Bestem den verdien ω^{opt} av ω som best demper den øvre halvdelen av spekteret til feilen, dvs finn

$$\omega^{\text{opt}} = \arg\min_{\omega} \max_{k > \frac{m+1}{2}} |\mu_k|.$$

Verifiser at du får tilbake det kjente $\omega^{\text{opt}} = 2/3$ når $\gamma = 0$. Hva skjer når γ går mot uendelig?

Oppgave 2

a) Beskriv kort ideen bak projeksjonsmetoder for løsning av lineære systemer $Ax = b$. Bruk anslagsvis 4-5 linjer.

Anta i resten av denne oppgaven at $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er symmetrisk positiv definitt, $b \in \mathbb{R}^n$ er en gitt høyreside, og $x = A^{-1}b$. Vi lar $r_k = b - Ax_k$ og $e_k = x - x_k = A^{-1}r_k$, for $k \geq 0$ og antar at x_0 er en gitt vektor.

b) Vi bruker approksimasjonsrom $\mathcal{K} = \text{span}\{v\}$ og føringsrom $\mathcal{L} = \mathcal{K}$. La x_1 være resultatet av ett skritt med projeksjonsmetoden. Vis at

$$\langle Ae_1, e_1 \rangle = \langle Ae_0, e_0 \rangle - \langle r_0, v \rangle^2 / \langle Av, v \rangle.$$

c) Metoden fra forrige punkt sier ingenting om hvordan ny søkeretning, v, velges i hver iterasjon. La oss derfor nå innføre følgende prinsipp: Velg v_k slik at $\langle v_k, r_k \rangle = \|r_k\|_1$, det vil si, la komponentene i v_k være 1 og -1, negativ (-1) hvis tilsvarende komponent i r_k er negativ, og positiv $(+1)$ hvis r_k-komponenten er ≥ 0. Vis at

$$\|e_{k+1}\|_A \leq \left(1 - \frac{1}{n\kappa(A)}\right)^{1/2} \|e_k\|_A.$$

Her er $\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ mens $\|w\|_A = \langle Aw, w \rangle^{1/2}$.

Oppgave 3 La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \qquad |\varepsilon| \leq 1.$$

a) Gi et estimat for egenverdiene til A ved å bruke Gerschgorin's teorem. Oppgi spesielt hva en kan si om den minste egenverdien. Illustrer gjerne med en tegning.

b) Vis, for eksempel ved å bruke en passende diagonal similærtransform, det skarpere estimatet $|\lambda_3 - 1| \leq \varepsilon^2$ for den minste egenverdien til A.

c) For $\varepsilon = 0.1$ har man funnet Q og R slik at $A - I = QR$ der

$$Q = \begin{bmatrix} -0.9899 & 0.1413 & 0.0050 \\ -0.1414 & -0.9893 & -0.0350 \\ 0 & -0.0353 & 0.9994 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -7.0711 & -1.4142 & -0.0141 \\ 0 & -2.8302 & -0.0989 \\ 0 & 0 & -0.0035 \end{bmatrix}.$$

Finn en approksimasjon til minste egenverdi til A fra dette.

Oppgave 4

a) Finn singulærverdidekomposisjonen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Matrisen i forrige punkt er et spesialtilfelle av en matrise $B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ der $B_{k,k} = 1$, $B_{k+1,k} = -1$ for $k = 1, \ldots, n$ og der alle andre elementer i B er null. Bestem singulærverdidekomposisjonen til B.