Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen
Navn: Bawfeh Kingsley Kometa (kontor: 73591975, mobil: 936 24 483)
Sensur: 06.01.2011

EKSAMEN I NUMERISK LINEÆR ALGEBRA (TMA4205)

Torsdag 9. desember, 2010
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Kode C. Følgende trykte/håndskrevne hjelpemidler er tillatt

- Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2. utgave.
- Trefethen and Bau, Numerical linear algebra *eller* Notater fra samme bok utlagt på hjemmesiden til faget
- Golub and Van Loan, Matrix Computations *eller* Notat fra samme bok utlagt på hjemmesiden til faget
- Egne forelesningsnotater fra kurset

Oppgave 1 En matrise $A \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ skal QR-faktoriseres. Etter å ha utført én Householder-transformasjon med matrisen Q_1 generert av v har man funnet

$$A_2 = Q_1 A = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}, \quad v = \frac{w}{\|w\|_2}, \quad w = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

a) Bestem A når det oppgis at $2\dfrac{w^T A_2}{w^T w} = [-1, \frac{8}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{9}{5}]$.
Hint for å kontrollere svaret: A har kun heltallige elementer.

b) Bestem den øvre-triangulære matrisen R slik at $A = QR$, bruk Householdertransformasjoner og oppgi vektorene v_2 og v_3 som genererer Q_2 og Q_3. Du skal ikke beregne Q.

Hint for å kontrollere svaret: Elementene i R er heltall som er delelige med 7.

Oppgave 2 Vi skal benytte en projeksjonsmetode for å approksimere løsningen av ligningssystemet

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\; b \in \mathbb{R}^n$$

Til dette benyttes et søkerom $\mathcal{K}$ og et føringsrom $\mathcal{L}$, begge av dimensjon $m \le n$. For en gitt startverdi x_0 søker vi en approksimasjon $\tilde{x} \in x_0 + \mathcal{K}$ slik at $\tilde{r} \perp \mathcal{L}$, dvs $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ er ortogonal på alle vektorene i $\mathcal{L}$.

a) La oss anta at vi kan skrive $\mathcal{L} = B\mathcal{K}$ for en ikke-singulær $n \times n$-matrise B. Vis at dersom $(Ax, Bx) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ så er denne metoden veldefinert, dvs det eksisterer en entydig $\tilde{x} \in x_0 + \mathcal{K}$ slik at $\tilde{r} \perp \mathcal{L}$.

b) Anta nå at B velges slik at $C := BA^{-1}$ er symmetrisk positiv definitt. Vis at resultatet $\tilde{x}$ vil oppfylle

$$\|b - A\tilde{x}\|_C = \min_{y \in x_0 + \mathcal{K}} \|b - Ay\|_C$$

der $\|\cdot\|_C$ er vektornormen på $\mathbb{R}^n$ definert ved $\|v\|_C = \sqrt{v^T C v}$.

c) La oss nå anta at A er symmetrisk slik at egenverdiene er reelle. La $\lambda_{\min}$ og $\lambda_{\max}$ være henholdsvis minste og største egenverdi til A. Vi setter også $B = (1-\mu)I + \mu A$. Vis at antagelsene i forrige punkt er oppfylt, dvs at $C = BA^{-1}$ er SPD hvis og bare hvis

$$\mu < \frac{1}{1-\lambda_{\min}} \quad \text{hvis } \lambda_{\min} < 1 \qquad \text{og} \qquad \mu > \frac{1}{1-\lambda_{\max}} \quad \text{hvis } \lambda_{\max} > 1.$$

Vi mener med dette at første ulikhet ignoreres hvis $\lambda_{\min} \ge 1$ og andre ulikhet ignoreres hvis $\lambda_{\max} \le 1$.

Oppgave 3 I denne oppgaven skal vi studere nærmere splittingsmetodens egenskaper som prekondisjonerere.

a) La A være en ikke-singulær kvadratisk matrise. Vi starter med å anta at man ønsker å approksimere løsningen av ligningen $A\mathrm{e} = r$ ved å benytte k iterasjoner med en splittingsmetode og at man setter initialvektoren $e^{(0)} = 0$. Anta først en generell splitting $A = D - N$, D inverterbar, og en iterasjon av formen

$$\mathrm{e}^{(k+1)} = G\mathrm{e}^{(k)} + \bar{r}, \qquad G = D^{-1}N, \quad \bar{r} = D^{-1}r$$

Vis at en kan skrive $\mathrm{e}^{(k)} = (I - G)^{-1}(I - G^k)\bar{r}$, og at hvis det tilsvarende prekondisjonerte systemet er $\tilde{A}x = M^{-1}Ax = M^{-1}b$ så gjelder at

$$\tilde{A} = M^{-1}A = (I - G)^{-1}(I - G^k)(I - G).$$

b) Anta i resten av denne oppgaven at A er symmetrisk positiv definitt (SPD) av formen $A = \alpha I - N$, $N^T = N$, $\alpha > \frac{1}{2}\lambda_{\max}$, der $\lambda_{\max} = \rho(A)$ er den største egenverdien til A. La $D = \alpha I$. Vis at prekondisjonereren M fra forrige punkt da også vil være SPD

c) Anta fremdeles at A er SPD, og at minste og største egenverdi til A er henholdsvis $\lambda_{\min}$ og $\lambda_{\max}$. Vi velger splittingsparameteren $\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ slik at prekondisjonereren blir SPD. La oss anta at vi benytter k iterasjoner av splittingsmetoden der k er et odde heltall. Vis at under disse omstendighetene gjelder

$$\kappa_2(\tilde{A}) = \frac{1 + \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k}{1 - \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k}$$

der $\kappa = \kappa_2(A)$ er kondisjonstallet til A.

Kommenter resultatet.

Oppgave 4

a) Vis at Frobenius-normen til en $n \times n$-matrise A er gitt som

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2},$$

der $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ er singulærverdiene til A.

b) Anta at A er en 202×202-matrise med $\|A\|_2 = 100$ og $\|A\|_F = 101$. Finn ut fra dette en størst mulig nedre skranke for $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$.

Appendix. Noen nyttige oppgitte formler

1. For alle kvadratiske $n \times n$-matriser C med elementer c_{ij} og egenverdier λ_i gjelder at

$$\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

2. Kondisjonstallet til en matrise A er gitt som $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. Spesielt med bruk at p-norm har man $\kappa_p(A) = \|A\|_p\|A^{-1}\|_p$