Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93518)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV DIFFERENISALLIGNINGER (75316)

Onsdag 5. mai 1999
Tid: 09:00–14:00
Hjelpemidler: Kategori B3, Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler,
typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.
Sensur faller i uke 22

Huskeliste:

- Skriv tydelig, og forsøk å presentere besvarelsen på en ryddig måte.
- Alle svar skal begrunnes. Ta med tilstrekkelig med mellomregninger der du mener dette er avgjørende for argumentasjonen.
- Når du anvender en numerisk metode på et spesifikt problem, angi svaret på desimal form. Når du utleder numeriske metoder, angi koeffisienter og konstanter som inngår i metoden eksakt hvis mulig, dvs for eksempel med $\sqrt{\ }$-tegn eller brøk.
- Vanskelighetsgraden i delspørsmålene er ikke nødvendigvis økende utover i en oppgave.

Oppgave 1

Vi betrakter varmeledningsligningen som følgende initial/randverdi problem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 \le x \le 1,\ t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) &= f(x),\ 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{1}$$

θ-metoden for numerisk løsning av denne ligningen kan skrives på følgende form

$$(1 - \theta r \delta_x^2)\, U_m^{n+1} = (1 + (1-\theta) r \delta_x^2)\, U_m^n, \quad 0 \le \theta \le 1,\ r = k/h^2 \tag{2}$$

a) For $\theta \neq 0$ blir metoden implisitt. La oss anta at Gauss-Jacobi iterasjon benyttes i hvert tidsskritt for å løse det tilhørende ligningssystem. Formuler iterasjonen og vis at denne iterasjonen konvergerer for alle positive r og θ uansett startverdi.

Svar: Om vi setter $S = \mathrm{trid}(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$, $U_n = (U_1^n, \dots, U_{M-1}^n)^T$ kan θ metoden skrives på formen $AU^{n+1} = b_n$ der

$$A = I - r\theta S, \quad b_n = (I + (1-\theta)rS)U^n$$

Gauss-Jacobi gir oss da iterasjonen

$$\left(U_m^{n+1}\right)^{(k)} = \frac{r\theta}{1+2r\theta}\left(\left(U_{m-1}^{n+1}\right)^{(k-1)} + (\left(U_{m+1}^{n+1}\right)^{(k-1)}\right) + \frac{1}{1+2r\theta}(1+(1-\theta)r\delta_x^2)U_m^n$$

Siden A er diagonaldominant for alle positive r og θ, konvergerer Gauss-Jacobi uansett startverdi.

b) Vi skal nå studere en eksplisitt integrasjonsmetode avledet fra den implisitte metoden (2). Den numeriske approksimasjonen i tidsnivå $n+1$ finnes ved å gjøre nøyaktig *en* iterasjon med Gauss-Jacobi metoden på ligningssystemet assosiert med (2). Som startverdi for iterasjonen, brukes den funne approksimasjon fra tidsnivå n.

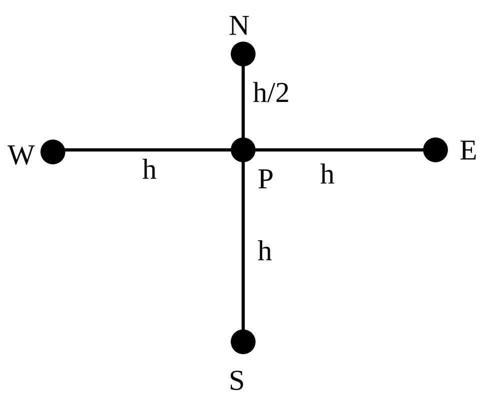
Formuler denne metoden, og undersøk for hvilke verdier av r og θ den er stabil.

c) Undersøk konvergensegenskapene til metoden i **(b)**.

Oppgave 2 Vi skal løse Poissons ligning

$$u_{xx} + u_{yy} = f \tag{3}$$

a) Det ønskede beregningsmolekyl nær randen $\partial\Omega$ ser ut som følger



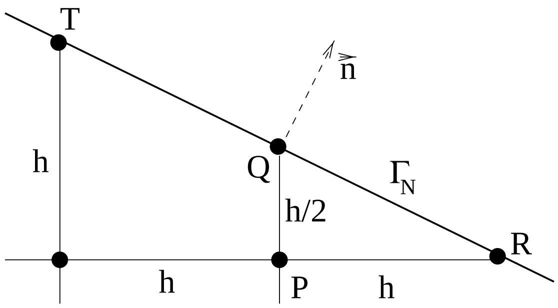
Finn et uttrykk for den prinsipale lokale avbruddsfeilen i den indre noden P ved bruk av formelen

$$-6\,U_P + U_E + U_W + \frac{4}{3}\,U_S + \frac{8}{3}\,U_N = h^2\,f_P$$

b) Området vi løser (3) på har en diagonal rand Γ_N og figuren viser et utsnitt av gitteret nær randen (som er angitt med tykk strek). På Γ_N er det oppgitt Neumann randverdier, dvs

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = g(x, y)$$

for en spesifisert funksjon $g(x, y)$.



Vi betrakter en approksimasjon av randkravet i punktet Q som er av formen

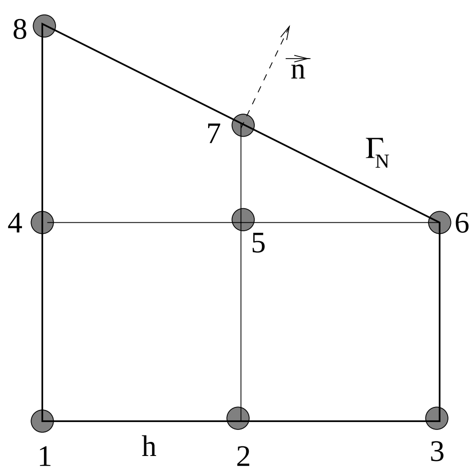
$$\alpha_Q U_Q + \alpha_T U_T + \alpha_R U_R + \alpha_P U_P = h g_Q$$

Bestem $\alpha_Q, \alpha_T, \alpha_R, \alpha_P$ slik at den lokale avbruddsfeilen blir av formen

$$\tau_Q = C h^2 \partial_y^2 u_Q + \mathcal{O}(h^3)$$

og bestem også konstanten C.

c) La nå hele området samt gitteret være som på figuren, der $h = 1/2$, dvs trapeset har hjørner $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1/2)$, $(0, 1)$.



Ligningen (3) antas å være

$$u_{xx} + u_{yy} = -2y$$

Vi lar randverdiene være $u = 0$ der $x = 0, x = 1, y = 0$ og setter på Γ_N (linjestykket mellom $(0,1)$ og $(1,1/2)$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = g(x,y)$$

der $g(1/2, 3/4) = \frac{1}{10}\sqrt{5}$.

Approksimer løsningen i punktene merket 5 og 7 på figuren ved å bruke resultatene fra (**a**) og (**b**).

Oppgave 3 Bølgeligningen i 1 romdimensjon kan skrives på formen

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x = 0$$

Vi benytter differanseskjemaet

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= U_m^n + \tfrac{1}{2}p\,(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n) \\ V_m^{n+1} &= V_m^n + \tfrac{1}{2}p\,(U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) \end{aligned}$$

der $p = k/h$.

a) Finn et uttrykk for den prinsipale avbruddsfeilen til denne metoden.

b) Undersøk Von Neumann stabilitet for skjemaet.