Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4210 Numerisk løsning av part. diff.lign. med differansemetoder
Vår 2005

Løsningsforslag — Øving 5

1 **a)** Vi skal undersøke stabilitet ved Fourier-metoden. Metodens karakteristiske polynom er gitt som

$$\tilde{a}(z,r) = 1 + \varepsilon r(z^{-1} - 2 + z) - \frac{\lambda h r}{2}(z - z^{-1}).$$

Fourier-metoden sier at metoden er stabil dersom kravet

$$|\tilde{a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r)| \leq 1 \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

er oppfylt. Vi setter inn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ i $\tilde{a}$ og får

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r) &= 1 - 2\varepsilon r(1 - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})) - \frac{\lambda h r}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= 1 - 4\varepsilon r \sin^2\frac{\theta}{2} - 2\mathrm{i}\alpha r \sin\theta,\end{aligned}$$

hvor $\alpha = \frac{\lambda h}{2}$. Siden $|a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r)| \leq 1$ er ekvivalent med $|a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r)|^2 \leq 1$, får vi ved kvadrering

$$|a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r)|^2 = 1 - 8\varepsilon r \sin^2\frac{\theta}{2} + 16\varepsilon^2 r^2 \sin^4\frac{\theta}{2} + 4\alpha^2 r^2 \sin^2\theta.$$

Vi bruker $\sin(2\frac{\theta}{2}) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ og deler så på $8\sin^2\frac{\theta}{2}$. Stabilitetskravet blir dermed at

$$-\varepsilon r + 2\varepsilon^2 r^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\alpha^2 r^2 \cos^2\frac{\theta}{2} \leq 0$$

eller ekvivalent at

$$2\alpha^2 r - \varepsilon + 2r(\varepsilon^2 - \alpha^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \leq 0.$$

Dette skal holde for $\theta \in [0, 2\pi]$. Vi må skille mellom to tilfeller:

1. Anta at $\alpha < \varepsilon$. Da har vi stabilitet dersom

   $$2\alpha^2 r - \varepsilon + 2r(\varepsilon^2 - \alpha^2) \leq 0,$$

   dvs. dersom

   $$r \leq \frac{1}{2\varepsilon}.$$

   (sett inn $\varepsilon = \alpha$)

2. Anta at $\alpha \geq \varepsilon$. Da har vi stabilitet dersom

$$2\alpha^2 r - \varepsilon \leq 0,$$

dvs dersom

$$r \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha^2}.$$

b) Matrisen Q er gitt ved

$$Q = \begin{bmatrix} 2\varepsilon & -(\varepsilon-\alpha) & & & \\ -(\varepsilon+\alpha) & 2\varepsilon & -(\varepsilon-\alpha) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(\varepsilon+\alpha) & 2\varepsilon & -(\varepsilon-\alpha) \\ & & & -2\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix},$$

mens F er gitt ved

$$F = r[\varepsilon+\alpha, 0, \ldots, 0]^T.$$

Legg merke til at siste rad i Q er litt forskjellig fra de andre. Dette kommer av formen av randbetingelsene.

c) For å kunne løse denne oppgaven må vi kjenne til hvordan determinanten til en matrise utvikles ved en av radene. Anta vi vil utvikle determinanten til en matrise A ved rad i, da gjelder

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

hvor $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$ hvor M_{ij} er ko-faktor matrisen til A, dvs matrisen vi får når vi stryker rad i og søyle j. På grunn av formen til Q, er det lurt å utvikle determinanten om siste rad. Da får vi

$$\begin{aligned}
\det(Q-\lambda I) &= 0\cdot Q_{N1} + 0\cdot Q_{N2} + \cdots + 0\cdot Q_{NN-2} - 2\varepsilon Q_{NN-1} + (2\varepsilon-\lambda)Q_{NN} \\
&= -2\varepsilon(-1)^{2N-1}\det\begin{bmatrix} 2\varepsilon-\lambda & -(\varepsilon-\alpha) & & & \\ -(\varepsilon+\alpha) & 2\varepsilon-\lambda & -(\varepsilon-\alpha) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(\varepsilon+\alpha) & 2\varepsilon-\lambda & 0 \\ & & & -(\varepsilon+\alpha) & -(\varepsilon-\alpha) \end{bmatrix} \\
&+ (2\varepsilon-\lambda)(-1)^{2N}\det\begin{bmatrix} 2\varepsilon-\lambda & -(\varepsilon-\alpha) & & & \\ -(\varepsilon+\alpha) & 2\varepsilon-\lambda & -(\varepsilon-\alpha) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(\varepsilon+\alpha) & 2\varepsilon-\lambda & -(\varepsilon-\alpha) \\ & & & -(\varepsilon+\alpha) & 2\varepsilon-\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vi ser at det siste leddet er gitt slik som det skal, mens det første ikke er på riktig form. Vi må beregne denne determinanten for seg selv. Hvis vi prøver å utvikle denne nok en gang om siste rad, støter vi raskt på problemer. Det vi bør legge merke til dog, er at siste *søyle* har bare siste element ulik null. Vi kan derfor benytte regelen om at determinanten av den transponerte matrisen er lik determinanten av matrisen selv, dvs $\det A = \det A^T$. Dette betyr at vi like godt kan utvikle determinanten om en av søylene til matrisen. Vi velger derfor å utvikle problemmatrisen over ved siste søyle. Vi får dermed at

$$\begin{aligned}\det(Q-\lambda I) &= (2\varepsilon-\lambda)T_{N-1}(\lambda) + (0+\ldots 0 - 2\varepsilon(\varepsilon-\alpha))T_{N-2}(\lambda)\\ &= (2\varepsilon-\lambda)T_{N-1}(\lambda) - 2\varepsilon(\varepsilon-\alpha))T_{N-2}(\lambda),\end{aligned}$$

som skulle vises. Videre ser vi at matrisene $T_M(\lambda)$ er tridiagonale, så vi kjenner egenverdiene til disse fra notatet om tridiagonale matriser. Rekurrensformelen fås dog på akkurat samme måte som over, og startbetingelsene er trivielle.

d) Matrise-metoden sier at metoden er stabil når $\rho(A) \leq 1$. Vi må finne $\sigma(Q)$, siden $\sigma(A) = 1 - r\sigma(Q)$. Dette gjøres ved å finne nullpunktene til $G_2(\lambda)$. Vi har at

$$G_2(\lambda) = (2\varepsilon-\lambda)T_1(\lambda) - 2\varepsilon(\varepsilon-\alpha)T_0(\lambda) = (2\varepsilon-\lambda)^2 - 2\varepsilon(\varepsilon-\alpha).$$

Vi har igjen to muligheter:

1. Anta at $\alpha < \varepsilon$. Da er $G_2(\lambda) = 0$ hvis

   $$\lambda = 2\varepsilon \pm \sqrt{2\varepsilon(\varepsilon-\alpha)}.$$

   Stabilitetskravet er

   $$r\lambda \geq 0 \quad \text{og} \quad r\lambda \leq 2.$$

   Den første ulikheten er trivielt oppfylt, og den andre gir

   $$r \leq \frac{2}{2\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon(\varepsilon-\alpha)}}$$

2. Anta at $\alpha \geq \varepsilon$. Da er røttene gitt ved

   $$\lambda = 2\varepsilon \pm \mathrm{i}\sqrt{2\varepsilon(\alpha-\varepsilon)},$$

   som gir

   $$\sigma(A) = 1 - 2r\varepsilon \pm \mathrm{i}r\sqrt{2\varepsilon(\alpha-\varepsilon)}.$$

   For å få stabilitet krever vi at

   $$|\sigma(A)|^2 = 1 - 4r\varepsilon + 4r^2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\alpha r^2 - 2\varepsilon^2 r^2 \leq 1,$$

   som er oppfylt når

   $$r \leq \frac{2}{\varepsilon+\alpha}.$$

e) Vi setter $R = \sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2}$, slik at $T_M(x) = R^M U_M(x)$. Rekurrensformelen for T^M gir da

$$R^M U_M(x) = 2xRR^{M-1}U_{M-1}(x) - R^2R^{M-2}U_{M-2}(x),$$

som er ekvivalent med

$$U_M(x) = 2xU_{M-1}(x) - U_{M-2}(x).$$

Startsbetingelsene gir at

$$RU_1(x) = 2xR \Rightarrow U_1(x) = 2x$$

og

$$R^2U_2(x) = 4x^2R^2 - R^2 \Rightarrow U_2(x) = 4x^2 - 1.$$

Dermed kjenner vi igjen denne rekurrens-relasjonen som Chebyshev-polynomene av andre sort, som er nettopp $U_M(x)$.

f) Vi har at $\lambda = 2\varepsilon - 2xR$, så rekurrensrelasjonen for $G_N(\lambda)$ gir, når vi substituerer inn uttrykket for T_M, følgende uttrykk

$$\begin{aligned} H_N(x) &= G_N(2\varepsilon - 2xR) \\ &= 2xRR^{N-1}U_{N-1}(x) - 2\varepsilon(\varepsilon - \alpha)R^{N-2}U_{N-2}(x) \\ &= 2R^{N-2}[x(\varepsilon^2 - \alpha^2)U_{N-1}(x) - \varepsilon(\varepsilon - \alpha)U_{N-2}(x)] \\ &= 2(\varepsilon - \alpha)R^{N-2}[x(\varepsilon + \alpha)U_{N-1}(x) - \varepsilon U_{N-2}(x)]. \end{aligned}$$

Vi kan dermed konkludere med at røttene til $H_N(x)$ ligger i intervallet $(-1, 1)$. La de korresponderende røttene til $G_N(\lambda)$ være gitt ved λ_j. Vi har da at

$$\begin{aligned} \sigma_j(A) &= 1 - r\lambda_j \\ &= 1 - 2r(\varepsilon - x_jR), \end{aligned}$$

så kravet $-1 \le \sigma_j(A) \le 1$ gir den trivielt oppfylte ulikheten

$$r(\varepsilon - x_jR) \ge 0$$

og ulikheten

$$r(\varepsilon - x_jR) \le 1,$$

som er oppfylt når

$$r \le \frac{1}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}}$$

g) Sammenligning av Fouriermetoden og matrisemetoden ("egenverditeknikker") gir at vi ikke får de samme betingelsene:

	Fouriermetoden	Matrisemetoden
$\alpha \ge \varepsilon$	$r \le \frac{\varepsilon}{2\alpha^2}$ (strengest)	$r \le \frac{\varepsilon}{2\alpha^2}$
$\alpha < \varepsilon$	$r \le \frac{1}{2\varepsilon}$ (strengest)	$r \le \frac{1}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2}}$

Fouriermetoden støtter ikke annet enn periodiske randkrav, mens systemet vårt har Dirichlet i venste endepunkt og Neumann i høyre endepunkt.

På den andre side så krever matrisemetoden at iterasjonsmatrisa A er normal, $AA^T = A^TA$ (symmetriske og skjev-symmetriske matriser har denne egenskapen). A er nesten symmetrisk så for en passende definisjon av nesten, så er den "nesten" normal.

Begge teknikker brukes likevel for å indikere stabilitetskrav for metoder med litt ustandard randbetingelser fordi det er bedre med en viss indikasjon på hva som kreves for stabilitet enn ingen.

$\boxed{2}$ Matrisene B og C er gitt ved

$$B = \begin{bmatrix} D_M & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_M \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2I_M & I_M & & \\ I_M & -2I_M & I_M & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & I_M & -2I_M \end{bmatrix},$$

hvor matrisen D_M er gitt ved

$$D_M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker nå å løse ligningen hvor B og C inngår. Kall høyresiden f, og sett $F = (I - rB)$ og $H = (I - rC)$. Vi omskriver ligningen til $FHU^{n+1} = f$. Først løser vi $Fy = f$, og deretter løser vi $HU^{n+1} = y$. Begge ligningene er tridiagonale og kan derfor løses med $\mathcal{O}(M^2)$ operasjoner. *NB:* Husk at $\mathcal{O}(M^2)$ operasjoner i denne sammenheng betyr "$\mathcal{O}(n)$ operasjoner", siden matrisen har M^2 rader og dermed M^4 elementer.

I Matlab kan disse matrisene enkelt konstrueres med et Kronecker tensorprodukt. Definer matrisa D i Matlab som D_M over. Vi kan da konstruere

```
>> M = 3
>> D = diag(ones(1,M-1),-1) + diag(-2*ones(1,M),0) + diag(ones(1,M-1),1)
D =
    -2     1     0
     1    -2     1
     0     1    -2
>> B = kron(eye(M), D)
>> C = kron(D, eye(M))
>> help kron
```

BC er da det samme som $\mathrm{kron}(D, D)$.

$\boxed{3}$ *Oppgave 13.11 i læreboka.*

We will use Fourier method to analyze the stability of the scheme

$$u_l^{n+1} = \frac{1}{2}(2 - 5\mu + 6\mu^2)u_l^n + \frac{2}{3}\mu(2 - 3\mu)(u_{l-1}^n + u_{l+1}^n) - \frac{1}{12}\mu(1 - 6\mu)(u_{l-2}^n + u_{l+2}^n).$$

The scheme has the following stability function $\tilde{a}(z, \mu)$

$$\tilde{a}(z, \mu) = \frac{1}{2}(2 - 5\mu + 6\mu^2) + \frac{2}{3}\mu(2 - 3\mu)(z^{-1} + z) - \frac{1}{12}\mu(1 - 6\mu)(z^{-2} + z^2).$$

Substituting $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, we obtain

$$\tilde{a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mu) \quad = \quad \frac{1}{2}(2 - 5\mu + 6\mu^2) + \frac{4}{3}\mu(2 - 3\mu)\cos\theta - \frac{1}{6}\mu(1 - 6\mu)\cos 2\theta.$$

Let us use $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ to express $\tilde{a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mu)$ in terms of $x = \cos\theta$:

$$\tilde{a}(x, \mu) = \frac{1}{3}\mu(6\mu - 1)x^2 + \frac{4}{3}\mu(2 - 3\mu)x + \left(1 - \frac{7}{3}\mu + 2\mu^2\right). \tag{1}$$

We must find all values μ such that

$$|\tilde{a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mu)| \le 1, \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

or, equivalently,

$$|\tilde{a}(x,\mu)| \leq 1, \qquad x \in [-1,1],$$

Let us notice that according to the definition $\mu \geq 0$. We limit ourselves to this interval in the analysis. There are two cases to consider:

1. If $\mu(6\mu-1)=0$, i.e. $\mu=0$ or $\mu=\frac{1}{6}$ the plot of the function $\tilde{a}(x,\mu)$ is a line. The maximum value of $|\tilde{a}(x,\mu)|$ for $x\in[-1,1]$ is either $|\tilde{a}(-1,\mu)|$ or $|\tilde{a}(1,\mu)|$. We get
$$|\tilde{a}(-1,\mu)| = 1-\frac{16}{3}\mu+8\mu^2, \qquad |\tilde{a}(1,\mu)|\equiv 1.$$
It is easy to see that $|\tilde{a}(-1,\mu)|\leq 1$ for $\mu=0$ and $\mu=\frac{1}{6}$. Thus, the scheme is stable.
2. If $\mu(6\mu-1)\neq 0$, the plot of the function $\tilde{a}(x,\mu)$ is a parabola so that there is one extremum point
$$x_0=-2\frac{(2-3\mu)}{(1-6\mu)}.$$
The maximum value of $|\tilde{a}(x,\mu)|$ for $x\in[-1,1]$ can be in $x=-1$, $x=1$ or $x=x_0$. It is important to notice that we must consider the point $x=x_0$ only if $x_0\in[-1,1]$. For the stability of the scheme we require
$$|\tilde{a}(-1,\mu)|\leq 1, \qquad |\tilde{a}(1,\mu)|\leq 1$$
and
$$|\tilde{a}(x_0,\mu)|\leq 1, \quad \text{if} \quad x_0\in[-1,1].$$
We obtain $|\tilde{a}(1,\mu)|\equiv 1$, $|\tilde{a}(-1,\mu)|\leq 1$ if $\mu\leq\frac{2}{3}$. The point x_0 is located in the interval $[-1,1]$ if $x\geq\frac{5}{12}$. Because for $\mu\in[\frac{5}{12},\frac{2}{3}]$ parabola (1) is has minimum in x_0 (why?) and it is entirely located in the upper half plane the value $|\tilde{a}(x_0,\mu)|$ can not have maximum at x_0.
Finally, the scheme is stable if $\mu\in[0,\frac{2}{3}]$.

$\boxed{4}$ *Oppgave 13.12 i læreboka.*

Vi skal drøfte stabiliteten til FM-skjemaet

$$u_l^{n+1}-\frac{1}{2}(\mu-\zeta)(u_{l-1}^{n+1}-2u_l^{n+1}+u_{l+1}^{n+1}) = u_l^n+\frac{1}{2}(\mu+\zeta)(u_{l-1}^n-2u_l^n+u_{l+1}^n)$$

for forskjellige valg av ζ. Først benytter vi matrisemetoden. La $\Delta x=\frac{1}{d+1}$. Vi setter som alltid

$$u^n=[u_1^n,\dots,u_d^n]^T.$$

Vi må først bestemme systemmatrisen $A_{\Delta x}$. Vi har at skjemaet kan skrives som

$$A_{\Delta x}^+u^{n+1}=A_{\Delta x}^-u^n,$$

hvor

$$A_{\Delta x}^+=\begin{bmatrix} 1+(\mu-\zeta) & -\frac{1}{2}(\mu-\zeta) & & \\ -\frac{1}{2}(\mu-\zeta) & 1+(\mu-\zeta) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}(\mu-\zeta) \\ & & -\frac{1}{2}(\mu-\zeta) & 1+(\mu-\zeta) \end{bmatrix}$$

og

$$A^-_{\Delta x} = \begin{bmatrix} 1-(\mu+\zeta) & \frac{1}{2}(\mu+\zeta) & & \\ \frac{1}{2}(\mu+\zeta) & 1-(\mu-\zeta) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}(\mu+\zeta) \\ & & \frac{1}{2}(\mu+\zeta) & 1-(\mu+\zeta) \end{bmatrix}.$$

Begge matrisene er TST (tridiagonal, symmetrisk og Toeplitz) og egenverdiene er gitt ved

$$\begin{aligned} \lambda_j^+ &= 1+(\mu-\zeta)-2\tfrac{1}{2}(\mu-\zeta)\cos(\tfrac{\pi j}{d+1}) = 1+2(\mu-\zeta)\sin^2(\tfrac{\pi j\Delta x}{2}) \qquad j=1,\dots,d \\ \lambda_j^- &= 1-(\mu+\zeta)+2\tfrac{1}{2}(\mu+\zeta)\cos(\tfrac{\pi j}{d+1}) = 1-2(\mu+\zeta)\sin^2(\tfrac{\pi j\Delta x}{2}) \qquad j=1,\dots,d. \end{aligned}$$

Selve systemmatrisen er gitt ved $A_{\Delta x} = \left(A^+_{\Delta x}\right)^{-1} A^-_{\Delta x}$. Siden komponentmatrisene er tridiagonale og derfor normale, er systemmatrisen selv en normal matrise. Fordi matriser $A^+_{\Delta x}$ og $A^-_{\Delta x}$ er TST kan vi skrive

$$A^+_{\Delta x} = QD^+Q^T \quad \text{og} \quad A^-_{\Delta x} = QD^-Q^T,$$

der Q er den ortonormale matrisen med egenvektorene (egenvektorene er like for $A^+_{\Delta x}$ og $A^-_{\Delta x}$) og D^+ og D^- diagonale matriser med de respektive egenverdiene (Lemma 10.5 i boka). Dermed følger det umiddelbart at

$$\begin{aligned} A_{\Delta x} &= (QD^+Q^T)^{-1}QD^-Q^T \\ &= Q(D^+)^{-1}Q^TQD^-Q^T \\ &= Q(D^+)^{-1}D^-Q^T. \end{aligned}$$

Dette viser at egenverdiene til $A_{\Delta x}$ er gitt som $(\lambda_j^+)^{-1}\lambda_j^-$, dvs egenverdiene er gitt som

$$\lambda_j = \frac{1-2(\mu+\zeta)\sin^2(\frac{\pi j\Delta x}{2})}{1+2(\mu-\zeta)\sin^2(\frac{\pi j\Delta x}{2})} \qquad j=1,\dots,d.$$

Vi vet at $0 \le \sin^2(\frac{\pi j\Delta x}{2}) \le 1$. Anta at verdien er s for å slippe å skrive så mye. $|\lambda_j| \le 1$ betyr da for våre reelle tall:

$$-1 \le \frac{1-2(\mu+\zeta)s}{1+2(\mu-\zeta)s} \le 1$$

og vi skiller i to tilfeller:

1. Nevneren er positiv, $1+2s\mu-2s\zeta > 0 \iff \zeta < \mu + 1/(2s)$. Da ganger vi opp nevneren og venstre ulikhet gir

   $$-1-2s\mu+2s\zeta \le 1-2s\mu-2s\zeta$$

   som betyr at vi må kreve

   $$\zeta \le \frac{1}{2s}$$

   for stabilitet. Høyre ulikhet blir

   $$1-2s\mu-2s\zeta \le 1+2s\mu-2s\zeta$$

   som kun krever $\mu > 0$ for stabilitet, og dette er alltid tilfredstilt i denne oppgaven (noe annet ville innebære negativ tid).

2. Nevneren er negativ, $\zeta > \mu + 1/(2s)$. Når nevneren er negativ må vi endre på fortegnet til ulikheten når vi ganger opp. Venstre ulikhet gir

$$-1 - 2s\mu + 2s\zeta \geq 1 - 2s\mu - 2s\zeta$$

som betyr at $\zeta \geq 1/(2s)$. Men høyre ulikhet gir nå $\mu \leq 0$ som ikke er sant i denne oppgaven, dermed er aldri skjemaet stabilt når nevneren er negativ.

Siden $0 \leq s \leq 1$ har vi at strengeste stabilitetsgrense kommer når $s = 1$, dermed har vi at skjemaet kun er stabilt når

$$\zeta \leq \frac{1}{2}.$$

Vi skal så benytte Fouriermetoden på samme skjema. Stabilitetsfunksjonen er gitt ved

$$\tilde{a}(z,\mu) = \frac{1 + \frac{1}{2}(\mu+\zeta)(z^{-1} - 2 + z)}{1 - \frac{1}{2}(\mu-\zeta)(z^{-1} - 2 + z)}.$$

Vi setter $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ og får

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\mu) &= \frac{1 - (\mu+\zeta) + \frac{1}{2}(\mu+\zeta)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{1 + (\mu-\zeta) - \frac{1}{2}(\mu-\zeta)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})} \\
&= \frac{1 - 2(\mu+\zeta)\sin^2(\frac{\theta}{2})}{1 + 2(\mu-\zeta)\sin^2(\frac{\theta}{2})} \qquad \theta \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Vi ser at stabilitetsfunksjonen sammensvarer med uttrykket for egenverdiene fra matrisemetoden, så vi kan konkludere med at Fouriermetoden gir samme stabilitetskrav. Legg merke til at hvis vi setter $\zeta = 0$, så får vi Crank–Nicolsons metode, så vi kan forvente at ζ er en slags relaksasjonsparameter, dvs at den skal øke konvergenshastigheten.