Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4210 Numerisk løsning av part. diff.lign. med differansemetoder
Vår 2005

Øving 5

$\boxed{1}$ Denne oppgaven er hentet fra våreksamen 1977. Modellproblemet for endimensjonal diffusjon-konveksjon er gitt ved

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon, \lambda > 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$

$$(2)\quad u(x,0) = 0 \qquad \text{for} \quad 0 < x < 1$$

$$(3)\quad \begin{cases} u(0,t) = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \end{cases} \qquad \text{for} \quad \mathrm{t} > 0.$$

Definer gitteret $G = \{(x_i, t_j)\}$ ved $x_i = ih,\ 0 \le i \le N+1,\ h = 1/N,\ t_j = jk,\ j \ge 0.$ Over G approksimeres (1) – (3) ved differensmetoden

$$(4)\quad U_i^{j+1} - U_i^j = \varepsilon r \Delta_{0,x}^2 U_i^j - \frac{\lambda h r}{2}(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) \quad \text{for} \quad \begin{cases} 1 \le i \le N \\ j \ge 0 \end{cases}$$

$$(5)\quad U_i^0 = 0 \qquad \text{for} \quad 0 \le i \le N$$

$$(6)\quad \begin{cases} U_0^j = 1 \\ U_{N-1}^j - U_{N+1}^j = 0 \end{cases} \qquad \text{for} \quad \mathrm{j} > 0.$$

a) Undersøk stabiliteten av (4) – (6) ved Fourier-metoden.

b) Med $U^j = [U_1^j, \ldots, U_N^j]$, kan (4) – (6) skrives som

$$U^{j+1} = AU^j + F.$$

Finn A og F, og vis at $A = I - rQ$ hvor Q er uavhengig av r.

c) Vis at egenverdiene til Q er gitt som nullpunktene til funksjonen

$$G_N(\lambda) = (2\varepsilon - \lambda)T_{N-1}(\lambda) - 2\varepsilon(\varepsilon - \alpha)T_{N-2}(\lambda),\ \alpha = \frac{\lambda h}{2},$$

hvor

$$T_M(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2\varepsilon - \lambda & -(\varepsilon - \alpha) & & \\ -(\varepsilon + \alpha) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -(\varepsilon - \alpha) \\ & & -(\varepsilon + \alpha) & 2\varepsilon - \lambda \end{bmatrix}$$

der M er dimensjonen til matrisen og

$$T_M(\lambda) = (2\varepsilon - \lambda)T_{M-1}(\lambda) - (\varepsilon^2 - \alpha^2)T_{M-2}(\lambda),\ M \geq 3$$

$$\begin{cases} T_1(\lambda) = 2\varepsilon - \lambda \\ T_2(\lambda) = (2\varepsilon - \lambda)^2 - (\varepsilon^2 - \alpha^2) \end{cases}.$$

d) Undersøk stabiliteten av (4) – (6) ved matrisemetoden når $N = 2$.

e) Anta at $\alpha < \varepsilon$. Vis at

$$\begin{cases} T_M(\lambda) = (\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2})^M U_M(x) \\ (2\varepsilon - \lambda) = 2x\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2} \end{cases}$$

hvor

$$U_M(x) = \sin((M+1)\arccos(x)))/\sqrt{1-x^2},\ |x| \leq 1.$$

f) Vi kan vise at nullpunktene til funksjonen $K(x) = (\varepsilon + \alpha)xU_{M-1}(x) - \varepsilon U_{M-2}(x)$ ligger alle i intervallet $(-1, 1)$. Undersøk stabiliteten av (4) – (6) ved matrisemetoden når $\alpha < \varepsilon$.

g) For $\alpha \geq \varepsilon$ er stabilitetsbetingelsene for (4) – (6) ved matrisemetoden gitt som

$$r \leq \frac{\varepsilon}{\alpha^2}.$$

Sammenlign dette resultatet og resultatet fra f) med resultatene fra a) og prøv å gi en forklaring på forskjellen.

$\boxed{2}$ Denne oppgaven er hentet fra eksamen holdt 5. juni 1989. Vi ser på det parabolske problemet

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad &, \quad (x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2,\ t \geq 0 \\ u(x,y,0) = F(x,y) \quad &, \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,t) = g(t) \quad &, \quad (x,y) \in \partial\Omega,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Vi diskretiserer ligningen ved metoden

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n) = \frac{1}{(\Delta z)^2}(\Delta_{0,x}^2 + \Delta_{0,y}^2)u_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{(\Delta z)^4}\Delta_{0,x}^2\Delta_{0,y}^2(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n),$$

hvor $u_{i,j}^n$ er approksimasjonen til $u(x_i, y_j, t_n)$, hvor $x_i = i\Delta z,\ y_j = j\Delta z,\ t_n = n\Delta t$ (ikke bland disse deltaene med differanseoperatoren Δ_0).

La $\Delta z = 1/(M+1)$, $M \geq 1$, og konstruer et grid over Ω, med den naturlige numereringen av nodene. La U^n være vektoren

$$U^n = [U^{n,1}, \ldots, U^{n,M}],\ U^{n,j} = [u_{1,j}^n, \ldots, u_{M,j}^n].$$

La $r = \Delta t/(\Delta z)^2$. Finn matrisene B og C slik at

$$(I - rB)(I - rC)U^{n+1} = (I + r^2 BC)U^n + G^n,$$

hvor G^n tar seg av randbetingelsene. Hvordan ville du løse denne ligningen hvis du bare kunne bruke $\mathcal{O}(M^2)$ operasjoner i hvert tidsskritt.

$\boxed{3}$ Oppgave 13.11 i læreboka side 305.

$\boxed{4}$ Oppgave 13.12 i læreboka side 305.