Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93518)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV DIFFERENISALLIGNINGER (75316)

Onsdag 5. mai 1999
Tid: 09:00–14:00
Hjelpemidler: Kategori B3, Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler,
typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.
Sensur faller i uke 22

Huskeliste:

- Skriv tydelig, og forsøk å presentere besvarelsen på en ryddig måte.
- Alle svar skal begrunnes. Ta med tilstrekkelig med mellomregninger der du mener dette er avgjørende for argumentasjonen.
- Når du anvender en numerisk metode på et spesifikt problem, angi svaret på desimal form. Når du utleder numeriske metoder, angi koeffisienter og konstanter som inngår i metoden eksakt hvis mulig, dvs for eksempel med $\sqrt{\ }$-tegn eller brøk.
- Vanskelighetsgraden i delspørsmålene er ikke nødvendigvis økende utover i en oppgave.

Oppgave 1

Vi betrakter varmeledningsligningen som følgende initial/randverdi problem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 \le x \le 1,\ t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(x,0) &= f(x),\ 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{1}$$

θ-metoden for numerisk løsning av denne ligningen kan skrives på følgende form

$$(1 - \theta r \delta_x^2)\, U_m^{n+1} = (1 + (1-\theta) r \delta_x^2)\, U_m^n, \quad 0 \le \theta \le 1,\ r = k/h^2 \tag{2}$$

a) For $\theta \neq 0$ blir metoden implisitt. La oss anta at Gauss-Jacobi iterasjon benyttes i hvert tidsskritt for å løse det tilhørende ligningssystem. Formuler iterasjonen og vis at denne iterasjonen konvergerer for alle positive r og θ uansett startverdi.

Svar: Om vi setter $S = \text{trid}(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$, $U_n = (U_1^n, \ldots, U_{M-1}^n)^T$ kan θ metoden skrives på formen $AU^{n+1} = b_n$ der

$$A = I - r\theta S, \quad b_n = (I + (1-\theta)rS)U^n$$

Gauss-Jacobi gir oss da iterasjonen

$$\left(U_m^{n+1}\right)^{(k)} = \frac{r\theta}{1+2r\theta}\left(\left(U_{m-1}^{n+1}\right)^{(k-1)} + (\left(U_{m+1}^{n+1}\right)^{(k-1)}\right) + \frac{1}{1+2r\theta}(1 + (1-\theta)r\delta_x^2)U_m^n$$

Siden A er diagonaldominant for alle positive r og θ, konvergerer Gauss-Jacobi uansett startverdi.

b) Vi skal nå studere en eksplisitt integrasjonsmetode avledet fra den implisitte metoden (2). Den numeriske approksimasjonen i tidsnivå $n+1$ finnes ved å gjøre nøyaktig *en* iterasjon med Gauss-Jacobi metoden på ligningssystemet assosiert med (2). Som startverdi for iterasjonen, brukes den funne approksimasjon fra tidsnivå n.

Formuler denne metoden, og undersøk for hvilke verdier av r og θ den er stabil.

Svar: Vi finner formelen

$$U_m^{n+1} = (1 + \frac{r}{1+2r\theta}\delta_x^2)U_m^n$$

På matriseform gir dette $U^{n+1} = B\,U^n$ der

$$B = I + \frac{r}{1+2\theta r}\,S$$

og det følger at egenverdiene blir:

$$\lambda_s(B) = 1 + \frac{r}{1+2r\theta}\lambda_s(S) = 1 + \frac{r}{1+2r\theta}(-4\sin^2\frac{s\pi}{2M}), \quad s = 1, \ldots, M-1.$$

Siden B er symmetrisk er det tilstrekkelig og nødvendig krav for stabilitet at spektralradien er mindre eller lik 1. Vi får som krav

$$r \leq \frac{1}{2(\cos^2\varepsilon_M - \theta)}, \quad \varepsilon_M = \frac{\pi}{2M}$$

dersom $\theta < \cos^2\varepsilon_M$ (ubetinget stabil ellers). Et krav som gjelder for alle h blir

$$r \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$$

Alternativt kan man bruke Von Neumann stabilitet, og får da essensielt samme svar.

c) Undersøk konvergensegenskapene til metoden i **(b)**.

Svar: Vi bruker Lax ekvivalensteorem som sier at differensmetoden er konvergent hvis og bare hvis den er stabil og konsistent. Stabiliteten er undersøkt i forrige deloppgave. For konsistens setter vi eksakt løsning $u_m^n = u(x_m, t_n)$ inn i differens formelen, og får da for den lokale avbruddsfeilen

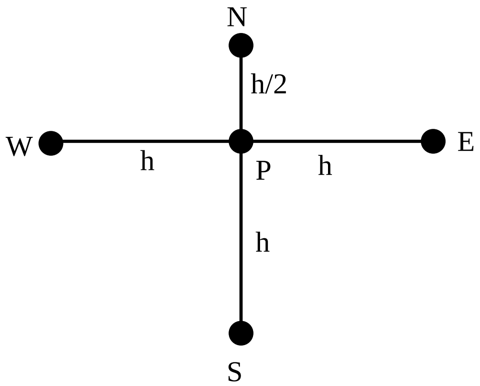
$$\tau_m^n = k(1 - \frac{1}{1+2r\theta})\partial_x^2 u_m^n + \mathcal{O}(h^4 + k^2)$$

Det følger at metoden ikke er ubetinget konsistent for $\theta \neq 0$: Når f.eks. $h, k \to 0$ slik at $r =$ konstant vil τ_m^n/k *ikke* gå mot 0 med når $k \to 0$. *Konklusjon: Metoden er ikke konvergent for $\theta > 0$.*

Oppgave 2 Vi skal løse Poissons ligning

$$u_{xx} + u_{yy} = f \tag{3}$$

a) Det ønskede beregningsmolekyl nær randen $\partial\Omega$ ser ut som følger



Finn et uttrykk for den prinsipale lokale avbruddsfeilen i den indre noden P ved bruk av formelen

$$-6\,U_P + U_E + U_W + \frac{4}{3}\,U_S + \frac{8}{3}\,U_N = h^2\,f_P$$

Svar: Vi setter igjen eksakt løsning inn i differensformelen og rekkeutvikler. Svaret blir

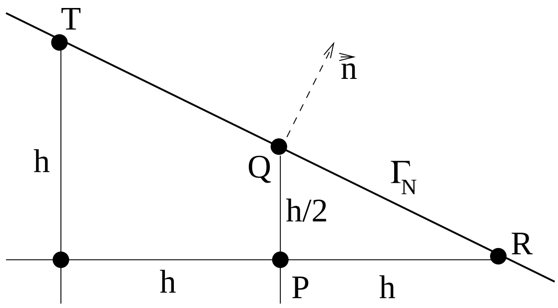
$$\tau_m^n = -\frac{1}{6}\,h^3\,\partial_y^3 u_p + \mathcal{O}(h^4)$$

Lokal avbruddsfeil er litt forskjellig definert i ulike bøker, for eksempel kan man dividere begge sider med h^2 i presentasjon av formelen, og da blir det h^1 istedetfor h^3 i den prinsipale lokale avbruddsfeilen.

b) Området vi løser (3) på har en diagonal rand Γ_N og figuren viser et utsnitt av gitteret nær randen (som er angitt med tykk strek). På Γ_N er det oppgitt Neumann randverdier, dvs

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = g(x, y)$$

for en spesifisert funksjon $g(x, y)$.



Vi betrakter en approksimasjon av randkravet i punktet Q som er av formen

$$\alpha_Q U_Q + \alpha_T U_T + \alpha_R U_R + \alpha_P U_P = h g_Q$$

Bestem $\alpha_Q, \alpha_T, \alpha_R, \alpha_P$ slik at den lokale avbruddsfeilen blir av formen

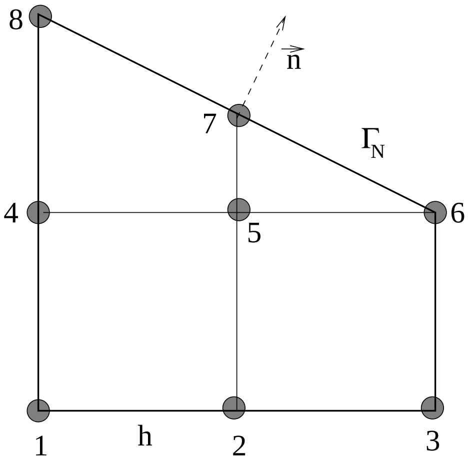
$$\tau_Q = C h^2 \partial_y^2 u_Q + \mathcal{O}(h^3)$$

og bestem også konstanten C.

Svar: Vi har at enhetsnormalvektoren blir av formen $\vec{n} = (n_x, n_y)^T$ der $n_y = 2n_x = 2/\sqrt{5}$. Vi finner at

$$\alpha_R = \frac{1}{2} n_x, \;\; \alpha_T = -\frac{1}{2} n_x, \;\; \alpha_Q = 5\, n_x, \;\; \alpha_P = -5\, n_x, \quad C = -\frac{5}{8} n_x$$

c) La nå hele området samt gitteret være som på figuren, der $h = 1/2$, dvs trapeset har hjørner $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1/2)$, $(0, 1)$.



Ligningen (3) antas å være

$$u_{xx} + u_{yy} = -2y$$

Vi lar randverdiene være $u = 0$ der $x = 0, x = 1, y = 0$ og setter på Γ_N (linjestykket mellom $(0,1)$ og $(1,1/2)$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = g(x,y)$$

der $g(1/2, 3/4) = \frac{1}{10}\sqrt{5}$.

Approksimer løsningen i punktene merket 5 og 7 på figuren ved å bruke resultatene fra (**a**) og (**b**).

Svar: $U_7 = \frac{33}{200} = 0.165$, $U_5 = \frac{23}{200} = 0.115$. (Eksakt løsning er $u(x,y) = xy(1-x)$)

Oppgave 3 Bølgeligningen i 1 romdimensjon kan skrives på formen

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x = 0$$

Vi benytter differanseskjemaet

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= U_m^n + \tfrac{1}{2}p\,(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n) \\ V_m^{n+1} &= V_m^n + \tfrac{1}{2}p\,(U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) \end{aligned}$$

der $p = k/h$.

a) Finn et uttrykk for den prinsipale avbruddsfeilen til denne metoden.

Svar: Taylorutvikling gir for eksempel for den prinsipale feilen

$$\begin{aligned} \tau_m^n(u) &= \frac{1}{2}k^2\partial_x^2 u_m^n - \frac{1}{6}kh^2\partial_x^3 v_m^n \\ \tau_m^n(v) &= -\frac{1}{2}k^2\partial_x^2 v_m^n - \frac{1}{6}kh^2\partial_x^3 u_m^n \end{aligned}$$

b) Undersøk Von Neumann stabilitet for skjemaet.

Svar: Anta at ved tidsskritt n har vi $U_m^n = \xi_n e^{i\beta x_m}$ og $V_m^n = \zeta_n e^{i\beta x_m}$. Innsatt i formelen gir dette

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \xi_n + ip\,\zeta_n \sin(\beta h) \\ \zeta_{n+1} &= \zeta_n + ip\,\xi_{n+1} \sin(\beta h) \end{aligned}$$

Om vi løser mhp $\xi_{n+1},\ \zeta_{n+1}$ fås

$$\begin{bmatrix} \xi_{n+1} \\ \\ \zeta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ip\,\sin(\beta h) \\ \\ ip\,\sin(\beta h) & 1 - p^2\,\sin^2(\beta h) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_n \\ \\ \zeta_n \end{bmatrix} = G \cdot \begin{bmatrix} \xi_n \\ \\ \zeta_n \end{bmatrix}$$

Må ha $\rho(G) \leq 1$. Merk at $\det(G) = 1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, der $\lambda_1,\ \lambda_2$ er egenverdier til G. Så $\rho(G) = 1$ dersom $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$, og $\rho(G) > 1$ ellers. Kriteriet blir da

$$\mathrm{Tr}(G)^2 - 4\det(G) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 \sin^2(\beta h)\,(p\sin(\beta h) + 2)\,(p\sin(\beta h) - 2)\ \leq\ 0.$$

Konklusjon: Metoden er Von Neumann stabil om $|p|\,|\sin(\beta h)| \leq 2$ for alle β, dvs vi må kreve $|p| \leq 2$.