UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (3518)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER (75318)

Mandag 16. mai 1994
Tid: 9:00–14:00
Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator. Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler.

Oppgave 1 Vi skal løse et startverdiproblem

$$u_t = u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

og vi ønsker en eksplisitt formel slik at diskretiseringsfeilen (global avbruddsfeil) er $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$. Vi lar $u_m^n = u(x_m, t_n)$ med $x_m = mh$ og $t_n = nk$.

a) Forklar, ved å bruke Taylorrekka til u_m^{n+1} om (x_m, t_n) hvordan en kan utlede formelen

$$U_m^{n+1} = (1 + r\delta_x^2 + \frac{1}{2}r^2\delta_x^4)\, U_m^n, \qquad r = \frac{k}{h^2}$$

og angi, basert på dette hva slags orden (i h og k) den lokale avbruddsfeilen τ_m^n kan forventes å ha.

b) Finn betingelsen på $r = k/h^2$ for at metoden i (**a**) skal oppfylle von Neumann kriteriet (forlang $|\xi| \le 1$).

c) La oss nå anta at det fins en konstant C slik at lokal avbruddsfeil for metoden i (**a**) oppfyller

$$|\tau_m^n| \le k\mu, \qquad \mu = C(h^2 + k^2)$$

Anta også at $r \le 1/2$ og vis at diskretiseringsfeilen

$$e_m^n = u_m^n - U_m^n$$

da oppfyller

$$\max_m |e_m^{n+1}| \le \max_m |e_m^n| + k\mu, \; n \ge 0$$

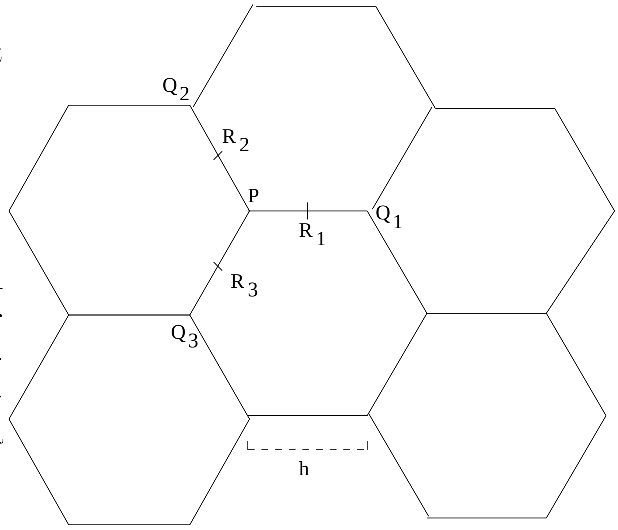
Utled fra dette en øvre skranke for $|e_m^n|$ med $nk \le T$ for en gitt T.

Oppgave 2

Vi skal løse et randverdiproblem på et område Ω

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(au_x)_x + (au_y)_y = 0 \text{ i } \Omega, \\ &u = f \text{ på } \partial\Omega \end{aligned}$$

der $a = a(x, y)$ er definert på $\overline{\Omega}$ og den er kontinuerlig og positiv. Man ønsker å bruke en differensformel på et heksagonalt nett som på figuren. Punktene R_j avmerket på figuren er midtpunkter på linjestykkene PQ_j.



a) Vis ved boksintegrasjon hvordan en kan komme fram til en differensligning av typen

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{3} a_{R_j} \left(U_{Q_j} - U_P\right) = 0$$

der a_{R_j} er funksjonen a evaluert i punktet R_j på figuren. *Hint:*

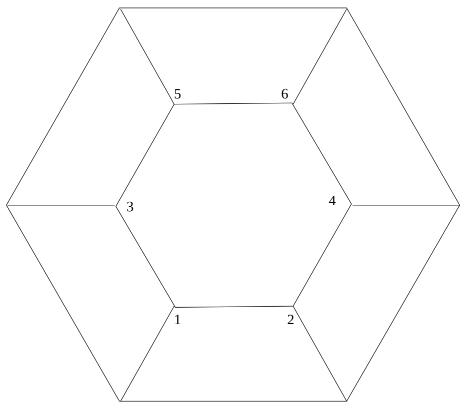
$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot (a \nabla u)\, dA = \int_{\partial\mathcal{R}} a \frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

b)

La $a \equiv 1$ og la Ω være begrenset av den ytre sekskanten (heksagonet) i figuren til høyre. Bruker vi formelen (2) sammen med de gitte randverdier i punktene 1–6, får vi et ligningssystem

$$(3) \qquad AU = b$$

hvor vi sørger for at A har 1-ere på diagonalen ved en passende skalering. Angi matrisen A og påvis at den er symmetrisk, positiv definitt, 2-syklisk og konsistent ordnet (Bruk $D = \text{diag}(1, \alpha, \alpha, \alpha^2, \alpha^2, \alpha^3)$). Angi spesielt delmengdene S og T som inngår i definisjonen av at A er 2-syklisk.



c) Matrisen $B = I - A$ har en egenverdi lik 2/3. Bruk denne opplysningen til å finne spektralradien til B og angi optimal relaksasjonsparameter for SOR anvendt på (3).

d) I en mer generell Matlabimplementasjon av SOR for (2), antas U-verdiene etter iterasjon k å være lagret i et endimensjonalt array `U(i)` med `M+N` elementer som er ordnet i samsvar med nummereringen av nodene. De `N` første elementene i U inneholder verdier for indre noder, og de `M` siste inneholder verdier for randnoder. Dessuten fins tilgjengelig et endimensjonalt array `a(i)` med `M+N` elementer som inneholder verdier $a(x_i, y_i)$ for hver node i gitteret slik at man kan approksimere a_{R_j} i (2) ved å interpolere med verdier fra dette arrayet. En har også et todimensjonalt $N \times 3$ array, `NABO(i,j)`, med heltallige verdier mellom 1 og `M+N` som inneholder indekser tilsvarende naboene til node i, dvs hvis P er node nr i vil j-te nabonodes verdi U_{Q_j} være inneholdt i `U(NABO(i,j))`. Skriv en Matlabfunksjon som implementerer <u>èn iterasjon</u> av SOR-algoritmen for (2) der relaksasjonsparameteren `omega`, heltallet `N` samt arrayene `a`, `NABO` og `U` (med verdier fra forrige iterasjon samt de gitte verdier for randnodene) er gitt som inputparametre.

Oppgave 3 Vi løser Poissons ligning

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f \ \text{ i } \ \mathcal{R}, \quad u = 0 \ \text{ på } \partial\mathcal{R}$$

ved hjelp av elementmetoden. Vi benytter trapesformede elementer med en node i hvert hjørne og bilineære elementfunksjoner. Trapeset vi spesielt skal se på har hjørner

$$(h,\ 0)\,, \quad \left(\frac{h}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right), \quad \left(-\frac{h}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right), \quad (-h,\ 0)$$

for et passende valgt origo der $h > 0$ er en diskretiseringsparameter. Tre av formfunksjonene er gitt som

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= -\frac{1}{6}\sqrt{3}\,\frac{1}{h^2}\,(x+h)\,(2y - h\sqrt{3}) \\
\psi_2(x,y) &= \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\frac{1}{h^2}\,(2x+h)\,y \\
\psi_3(x,y) &= \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\frac{1}{h^2}\,(h-2x)\,y
\end{aligned}$$

a) Finn den fjerde formfunksjonen.

b) Dette elementet E har en elementstivhetsmatrise $A^E = [\alpha^E_{pq}]_{p,q=1:4}$. Beregn <u>ett</u> element i A^E (du velger selv hvilket).

Hint. Med $x = \xi h,\ y = \eta h$ gjelder integrasjonsformelen

$$\int_E \left(a\,\xi^2 + b\,\xi\eta + c\,\eta^2 + d\,\xi + e\,\eta + f\right) dA = h^2\left(\frac{5}{32}\sqrt{3}(a+c) + \frac{1}{2}e + \frac{3}{4}\sqrt{3}f\right)$$

for vilkårlige konstanter a, b, c, d, e, f der $dA = d(h\xi)d(h\eta)$.

Oppgave 4 Sammenlign Courant-Friedrichs-Levy betingelsen med Von Neumann betingelsen når differensformelen

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{1}{6}ap\,(U_{m+2}^n + U_{m+1}^n - U_{m-1}^n - U_{m-2}^n), \quad p = \frac{k}{h}$$

anvendes på den hyperbolske ligningen $u_t = au_x$ gitt som startverdiproblem. Kommenter resultatet.