**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Syvert P. Nørsett   73 59 35 45

EKSAMEN I FAG 75316/SIF5045/75320
NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER
Fredag 12. mai 2000
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler: Lærebøker, notater, kalkulator

OPPGAVE 1

a) Følgende Runge-Kutta metode er gitt:

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & \frac{(4-\sqrt{2})\mu}{4} & \frac{(4-3\sqrt{2})\mu}{4} \\ c_2 & \frac{(4+3\sqrt{2})\mu}{4} & \frac{(4+\sqrt{2})\mu}{4} \\ \hline & \frac{4(1+\sqrt{2})\mu-\sqrt{2}}{8\mu} & \frac{4(1-\sqrt{2})\mu+\sqrt{2}}{8\mu} \end{array}$$

med $\mu \in \mathbf{R}$. Finn c_1 og c_2 og kom frem til denne metoden ved hjelp av kollokasjonsmetoden.

b) Vis at metoden har orden 2 for alle $\mu \in \mathbf{R}$.

c) Gi betingelsen på μ for orden 3 av metoden.

d) Finn stabilitetsfunksjonen for metoden i a) .

e) For hvilke verdier av μ er metoden A-stabil?

OPPGAVE 2

Følgende metode er gitt til løsning av

$$u_t = u_{xx}$$

med relevante start og randvilkår,

$$U_l^{n+2} = 2\mu(U_{l+1}^{n+1} - 2U_l^{n+1} + U_{l-1}^{n+1}) + U_l^n, \quad \mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{ er konstant.}$$

a) Vis at metoden har orden 2

b) Gi stabilitets egenskapen til denne metoden.

OPPGAVE 3

Vi skal løse Laplace's ligning over området [0,1] $\times$ [0,1] med $\Delta x = \Delta y = 0.25$ med løsningen gitt på randa som 1. De ukjente nummereres diagonalt som følgende skjema viser:

x_1	x_3	x_6
x_2	x_5	x_8
x_4	x_7	x_9

Sett

$$U = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T$$

a) Finn matrisen B slik at

$$BU = F$$

hvor F kommer fra randen.

b) Nå gjelder at

$$U = PX$$

hvor P er en regulær matrise og X vektoren med de ukjente i den naturlige rekkefølgen vi kjenner fra kurset med

$$\Delta x = \Delta y = 0.25$$

Vis at matrisen B er regulær.