Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Syvert P. Nørsett 73 59 35 45

EKSAMEN I FAG SIF5045/75320

NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER
Bokmål
Tirsdag 15. mai 2001
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler: Lærebøker, notater, kalkulator

Sensuren faller i uke 23.

Oppgave 1

Vi skal arbeide med

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

og bruke metoden

$$25y_{n+4} - 48y_{n+3} + 36y_{n+2} - 16y_{n+1} + 3y_n = bhf_{n+m}$$

hvor h er skrittlengden og b er en reell parameter.

a) Finn b slik at metoden med $m = 0$ blir av orden 1 .

b) Vis at denne metoden av orden 1 er konvergent.

c) Finn b slik at metoden med $m = 4$ har orden 4 og angi metodens feilkonstant.

d) Argumenter for at metoden av orden 4 er konvergent.

e) Er metoden av orden 4 A-stabil? Begrunn svaret.

Oppgave 2

Vi skal betrakte det elliptiske problemet

$$au_{xx} + bu_{yy} = -16; \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

med $a > 0$ og $b > 0$ og reelle, med Dirichlet randbetingelse, $u = g$ på området

$$[0, 1] \times [0, 1].$$

Vi benytter sentral differanse operatoren av orden 2 i rommet med $\Delta x = \Delta y = 1/(m + 1)$ og naturlig nummerering av de ukjente U.

a) Beskriv matrisen A og angi F slik at

   $AU = F$

   hvor F kommer fra randen og inhomogenitetsleddet i problemet.

b) Vis at A er ikke-singulær.

Oppgave 3

Til numerisk løsning av

$$\partial u(x, t)/\partial t = \partial^2 u(x, t)/\partial x^2$$

i området

x $\in$ [0,1] og $t \geq 0$

med startkravet

$$u(x, 0) = f(x)$$

og randkravet

$$u(0, t) = \phi_0(t), u(1, t) = \phi_1(t)$$

skal vi benytte baklengs Euler i tiden og sentral differense operatoren av orden 2 i rommet.

a) Finn den lokale avbruddsfeilen for metoden.

b) Vis at metoden konverger for alle Couranttall $\mu = \Delta t/\Delta x^2$ i endelig tid t, uten å bruke Lax' ekvivalens teorem.