Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Syvert P. Nørsett 73 59 35 45

EKSAMEN I FAG SIF5045

NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER MED DIFFERANSEMETODER

Tirsdag 7. mai 2002

Tid: 0900-1400

Hjelpemidler: Lærebøker, notater, kalkulator

OPPGAVE 1

For differensialligningen

$$y' = f(t, y), y(0) = y_0$$

skal vi se på en Runge-Kutta-metode med Butcher-tabellen:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{array}$$

a) Sjekk at metoden er av orden 3.

b) Vi skal bruke denne metoden til feilkontroll til en metode av orden 2. Gi en metode av orden 2 relatert til denne Butcher-tabellen uten at arbeidet blir ekstra stort og sjekk at den metoden har orden 2.

c) Finn stabilitetsfunksjonen til metoden av orden 3.

d) Anta at orden 2 resultatet er y^2_{n+1} og at orden 3 resultatet er y^3_{n+1}. Sett opp formler for hvorledes y^2_{n+1} og y^3_{n+1} finnes når y_n er gitt i punktet t_n. Skriv den MATLAB linjen som gir en ny skrittlengde med dette metodeparet.

OPPGAVE 2

Vi skal se på problemet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

for

$$(x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

og $t > 0$. Videre har vi gitt startbetingelsen

$$u(x,y,0) = g(x,y).$$

Vi antar at u er null på randa. Ω diskretiseres med

$$h = \Delta x = \Delta y = 1/(m+1).$$

Eulers metode for dette problemet er

$$U^{n+1} = U^n + \mu[\Delta^2_{0,x} + \Delta^2_{0,y}]U^n$$

hvor U^n er de numeriske verdiene ved tiden t_n.

$$\mu = \frac{\Delta t}{h^2}.$$

a) Gi avbruddsfeilen for Eulers metode i dette tilfellet. Vi antar at μ er konstant.

b) Vis at metoden konvergerer for

$$\mu \leq \frac{1}{4}.$$

[Hint: Egenverdiene for fempunktsstensilet på Laplace ligningen kan brukes]

OPPGAVE 3

For en ODE

$$y' = f(t, y), y(0) = y_0$$

er denne metoden gitt:

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
\frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & a_{23} \\
1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

a) Gi det polynomet som er med å definere kollokasjonsmetoden entydig og finn $a_{1j}, j = 1, 2, 3$ og a_{23}

b) Gi stabilitetsfunksjonen for denne metoden

c) Argumenter for at metoden er A-stabil eller ikke.