Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø, tlf. 94479

EKSAMEN I FAG SIF5045
NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER
MED DIFFERANSEMETODER
Mandag 19. mai
Tid: 09:00–12:00
BOKMÅL

Hjelpemidler: B
Typegodkjent kalkulator HP30S
Iserles, *A first Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge
Rottmanns matematiske formelsamling, norsk utgave, Bracan forlag.
Et gult ark (A4 med stempel) til egne formler og notater.

Alle svar skal begrunnes.
Sensuren faller i uke 24.

Oppgave 1 (40%)

Konstruer en enkel eksplisitt differansemetode for differensialligningen

$$\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} + bu, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Her er b en konstant.

Bruk Lax' ekvivalensteorem til å bestemme når metoden er konvergent.
Hint: En begrenset vekst i løsningen kan aksepteres.

Oppgave 2 (40%)

Oppgaven går ut på å løse ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} - u = 0$$

med randbetingelsene

$$\begin{aligned} u &= x \quad \text{for} \quad y = 0, \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + 2u &= 0 \quad \text{for} \quad x = 0, \quad 0 < y < 0.5 \\ u &= 1 \quad \text{på de øvrige rendene.} \end{aligned}$$

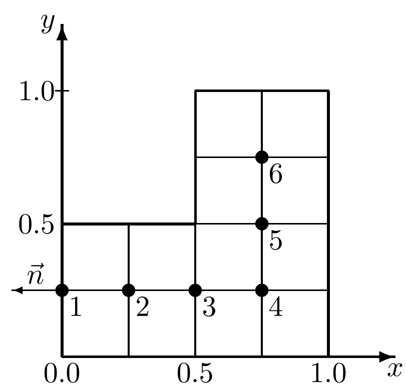
over området gitt i figuren. Operatoren $u_{xx} + u_{yy}$ diskretiseres med 5-punktsformelen. Du må selv velge en egnet diskretisering av randkravet i $x = 0$.

a) Velg skrittlengden $h = 0.25$ i både x- og y-retningen. Det resulterende ligningssystemet kan skrives på formen

$$AU = b$$

der $U = [U_1, U_2, \cdots, U_6]^T$ og U_i er den numeriske løsningen i punktet i (se figuren).

Finn A og b.



b) Velg nå en skrittlengde $h = 1/(2N)$, men bruk ellers samme diskretisering som i punkt **a)**. Forklar hvordan du vil løse det underliggende lineære ligningssystemet med Gauss-Seidels metode *uten* å skrive opp matrisen A eller vektoren b.

Oppgave 3 (20 %)

Gitt differensialligningen

$$u_t + 2tu_x = 0 \tag{1}$$

Vis at karakteristikken til ligningen gjennom et gitt punkt (X, T), $T > 0$ er gitt ved

$$t = \sqrt{x - X + T^2}, \qquad t > 0$$

Lax-Friedrichs metode anvendt på (1) er gitt ved

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n) + t_n \frac{k}{h}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)$$

der k er skrittlengden i t-retningen og h er skrittlengden i x-retningen.

Bruk karakteristikken for å finne en CFL-betingelse for dette skjemaet.