**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER MED DIFFERANSEMETODER (TMA4210)

Mandag 24. mai 2004
Tid: 09:00–12:00, Sensur: 14.06.2004

Hjelpemidler: Kategori B, Typegodkjent kalkulator med tomt minne, HP30S.
Iserles A., *A first Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press.
Owren B., *TMA4210 Numerisk løsning av partielle differensialligninger med endelig differensemetoder*, kompendium, 2004.
Rottmanns matematiske formelsamling, norsk utgave, Bracan forlag.

Oppgave 1 Vi ser på diffusjonsligningen

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) &= g_0(t), \qquad u(1,t) = g_1(t), \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Vi innfører et rektangulært gitter med punkter (x_m, t_n) der $x_m = m\,h,\ 0 \le m \le M,\ h = 1/M$, $t_n = nk,\ n = 0, 1, \ldots$. Størrelsen U_m^n approksimerer $u_m^n = u(x_m, t_n)$. Vi lager en metode av følgende type

$$U_m^{n+\frac{1}{2}} = U_m^n + \frac{r}{2}\left(\Delta_x U_m^n - \nabla_x U_m^{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{2}$$

$$U_m^{n+1} = U_m^{n+\frac{1}{2}} + \frac{r}{2}\left(\Delta_x U_m^{n+1} - \nabla_x U_m^{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{3}$$

hvor $r = k/h^2$. Her er $U_m^{n+\frac{1}{2}}$ å oppfatte som en approksimasjon til $u(x_m, t_n + \frac{1}{2}k)$. Δ_x og ∇_x er henholdsvis forover- og bakoverdifferens i x-retning.

a) Beskriv en eksplisitt beregningsgang for skjemaet (2), (3). Bruk gjerne beregningsmolekyl som en del av forklaringen.

Det er mulig å skrive metoden ovenfor på formen

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{1}{4}(2r + r^2)\,\delta_x^2\,U_m^{n+1} + \frac{1}{4}(2r - r^2)\,\delta_x^2\,U_m^n. \tag{4}$$

b) Undersøk von Neumann's kriterium for stabilitet på denne metoden.

c) Det viser seg at dersom en lar $h \to 0$ og $k \to 0$ på en slik måte at $c = k/h$ er konstant, så vil den numeriske approksimasjonen U_m^n konvergere mot $\tilde{u}(x_m, t_n)$ for alle $x_m = mh$ og $t_n = nk$. Men funksjonen $\tilde{u}(x,t)$ er ikke eksakt løsning av diffusjonsligningen (1). Forklar hvorfor dette skjer, og finn en differensialligning som har $\tilde{u}(x,t)$ som eksakt løsning.

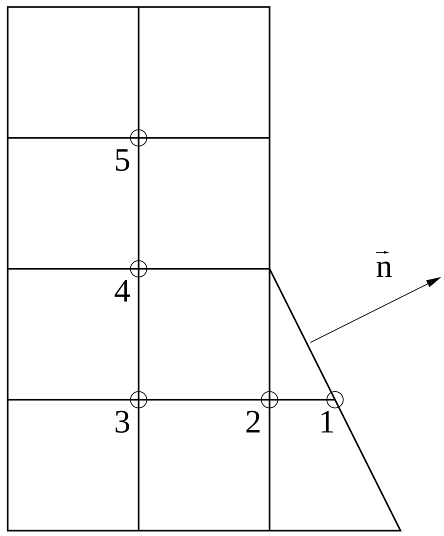
Oppgave 2 Vi ser her på Laplace's ligning på området Ω angitt på figuren.

$$\Delta u = 0, \qquad (x,y) \in \Omega,$$

med randverdier

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le 0.75,\\
u(x,1) &= 0, && 0 \le x \le 0.5,\\
u(0,y) &= \sin \pi y, && 0 \le y \le 1,\\
u(0.5,y) &= \sin \pi y, && 0.5 \le y \le 1,\\
\tfrac{\partial u}{\partial n}\left(\tfrac{3-\lambda}{4}, \tfrac{\lambda}{2}\right) &= \lambda, && 0 \le \lambda \le 1,
\end{aligned}$$

der $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$. Som figuren antyder, brukes skrittlengde $h = 0.25$ både i x- og y-retning.



Finn en konsistent diskretisering av randkravet i noden merket 1, og sett opp et lineært ligningssystem for alle de 5 ukjente i figuren.