Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Syvert Nørsett (73 59 35 45)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER MED DIFFERENSMETODER (TMA4210)

Bokmål
Fredag 10. juni 2005
Tid: 09:00 – 12:00 Sensur 30. juni 2005

Hjelpemidler:
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Oppgave 1 Vi skal se på problemet

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

i området $x \in [0,1]$ og $t \geq 0$. Vi har også at

$$u(0,t) = \phi_0(t), \quad u(1,t) = \phi_1(t) \quad \text{og} \quad u(x,0) = g(t),$$

og vi antar at (1) er korrekt stilt. Vi setter $\Delta x = \frac{1}{m+1}$ med $m \geq 0$. Denne differensialligningen skal vi løse med θ-metoden med $\Delta t > 0$. La de numeriske verdiene i (x_ℓ, t_n) være U_ℓ^n. θ-metoden kan da settes opp som

$$U_\ell^{n+1} = U_\ell^n + \theta\mu\left(U_{\ell-1}^n - 2U_\ell^n + U_{l+1}^n\right) + (1-\theta)\mu\left(U_{\ell-1}^{n+1} - 2U_\ell^{n+1} + U_{l+1}^{n+1}\right) \tag{2}$$

med Courant-tallet $\mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ og $0 \leq \theta \leq 1$.

a) La

$$U^n = [U_1^n, \dots, U_m^n]^T \,.$$

Finn $M \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $A \in \mathbf{R}^{m\times m}$ og $F \in \mathbf{R}^m$ slik at

$$MU^{n+1} = AU^n + F \tag{3}$$

hvor F kommer fra randdata.

b) Vis at M i (3) er regulær.

c) La $u_\ell^n = u(x_\ell, t_n)$. Avbruddsfeilen T_ℓ^{n+1} til θ-metoden definerer vi som

$$T_\ell^{n+1} = u_\ell^{n+1} - u_\ell^n - (1-\theta)\mu\left(u_{\ell-1}^{n+1} - 2u_\ell^{n+1} + u_{\ell+1}^{n+1}\right) - \theta\mu\left(u_{\ell-1}^n - 2u_\ell^n + u_{l+1}^n\right).$$

Vis at da gjelder

$$\left|T_\ell^{n+1}\right| \le C\,(\Delta x)^4$$

hvor C er en konstant og μ er konstant. Du kan anta at den eksakte løsningen $u(x,t)$ er minst fire ganger deriverbar i rom og minst to ganger deriverbar i tid.

Hint 1: Du kan bruke at

$$u(x_{\ell-1}, t_n) - 2u(x_\ell, t_n) + u(x_{\ell+1}, t_n) = (\Delta x)^2 u_{xx}(x_l, t_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

Hint 2: Bruk $\Delta t = \mu(\Delta x)^2$ når du skal avgjøre hvilke ledd du kan droppe i utviklingen.

d) Vis at θ-metoden (2) er konvergent uten å bruke Lax's ekvivalensteorem.

Hint 1: Husk å generalisere $\mu \le 1/2$ i tilsvarende bevis for forlengs Euler til å gjelde for θ-metoden.

Hint 2: Definer e_ℓ^n som feil i punktet (x_ℓ, t_n) og

$$\eta^n = \max_\ell |e_\ell^n|.$$