Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Bård Skaflestad (92426867)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER

MED DIFFERANSEMETODER (TMA4212)

Fredag 9. juni 2006
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 30.06.2006

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

Oppgave 1 Vi skal i denne oppgaven se på adveksjon-diffusjonsligningen formulert som et start/randverdiproblem

$$\begin{aligned} & u_t + a u_x = \nu\, u_{xx}, && t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ & u(x,0) = f(x), && 0 \le x \le 1, \\ & u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t), && t \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Vi innfører et gitter med noder (x_m, t_n) der $x_m = mh,\ 0 \le m \le M$ og $t_n = nk,\ 0 \le n \le N$ der skrittelengdene er gitt som $h = 1/M$ og $k = T/N$. La $r = k/h^2$ og $q = ak/h$. Til $u_m^n = u(x_m, t_n)$ benyttes U_m^n som approksimasjon. Følgende eksplisitte skjema foreslås for (1)

$$U_m^{n+1} = (\nu r + \frac{\alpha + 1}{2}\, q)\, U_{m-1}^n + (1 - 2\nu r - \alpha q)\, U_m^n + (\nu r + \frac{\alpha - 1}{2}\, q)\, U_{m+1}^n, \tag{2}$$

hvor α er en parameter som vi kan velge. Finn et uttrykk for hovedleddene i den lokale avbruddsfeilen uttrykt ved α, og kommenter om det fins et spesifikt valg av α gir en bedre konvergensorden.

b) La oss anta at vi setter $\alpha = 0$ i (2), men så erstatter diffusjonskoeffisienten ν i (1) med $\bar{\nu} = \nu + \frac{1}{2}\alpha\, a\, h$. Skriv ned den resulterende differensformelen, og kommenter svaret.

c) Sett $\alpha = 0$ i (2) og undersøk metodens stabilitet på tidsintervall $[0, T]$ med matrisemetoden.

Hint: Matrisen A som skal undersøkes er diagonaliserbar slik at $A = T\Lambda T^{-1}$ der

$$\|T\|_2 \cdot \|T^{-1}\|_2 \leq e^{\frac{|a|}{2\nu}}, \qquad \text{for alle } h, k.$$

Oppgave 2 En funksjon $u(x, y)$ tilfredsstiller den elliptiske differensialligningen

$$u_{xx} + 3u_{yy} = -16$$

på et kvadrat begrenset av linjene $x = \pm 1$ og $y = \pm 1$. Randbetingelsene er $u = 0$ når $x = 1$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$ når $y = 1$. Dessuten er $u(x, y)$ symmetrisk både om x-aksen og om y-aksen. Vi bruker en fempunktsformel som differensapproksimasjon, og et ekvidistant gitter med skrittlengder $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$.

a) Vis hvordan en kan approksimere løsningen av dette problemet ved å løse ligningssystemet $AU = b$ der A er en 20×20-matrise av formen

$$A = \begin{bmatrix} B & 6I & & & \\ 3I & B & 3I & & \\ & 3I & B & 3I & \\ & & 3I & B & 3I \\ & & & 6I & B \end{bmatrix}$$

b) Finn matrisen B.

Oppgave 3 Vi ser på den hyperbolske differensialligningen

$$u_t + 2t\, u_x = 0. \tag{3}$$

a) Vis at karakteristikken gjennom punktet (X, T), $T > 0$ er gitt ved ligningen

$$t = \sqrt{x - X + T^2}, \qquad t > 0$$

b) Bruk dette til å bestemme CFL-kriteriet for et eksplisitt skjema av typen

$$U_m^{n+1} = a_{-1}\, U_{m-1}^n + a_0\, U_m^n + a_1\, U_{m+1}^n$$

anvendt på (3).

c) Undersøk dissipasjonsegenskapene til skjemaet

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n) - \frac{ak}{2h}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)$$

for ligningen $u_t + au_x = 0$.

Oppgitt formel. La $A = \mathrm{trid}(\ell, d, u)$ det vil si en tridiagonal $n \times n$-matrise med d på diagonalen ℓ på subdiagonalen, og u på superdiagonalen. Da er egenverdiene gitt som

$$\lambda_s = d + 2\sqrt{\ell u}\,\cos\frac{\pi s}{n+1}, \quad s = 1, \ldots, n.$$