Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Brynjulf Owren (93021641)

EKSAMEN I NUMERISK LØSNING AV DIFFERENSIALLIGNINGER

MED DIFFERANSEMETODER (TMA4212)

Mandag 4. juni 2007
Tid: 09:00–13:00, Sensur: 25.06.2007

Hjelpemidler: Kategori B, alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt enkel kalkulator tillatt. Typegodkjent lommekalkulator med tomt minne.

NB! Du skal kun gjøre 8 av de 10 punktene. Du velger selv hvilke. Svarer du på mer enn 8 vil de kun de 8 *første* i din besvarelse gi uttelling.

Oppgave 1 Gitt S/R-problemet

$$
\begin{aligned}
u_t &= \partial_x(a(x)\partial_x u), \quad 0 < x < 1,\ t > 0,\\
u(x,0) &= f(x), \quad 0 \le x \le 1,\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t \ge 0.
\end{aligned}
$$

der $a(x)$ er kontinuerlig og positiv i intervallet $[0,1]$.

a) Diskretiser denne ligningen ved å benytte sentraldifferenser i rom, det vil si erstatt ∂_x med $(1/h)\delta_x$, og bruk Eulers metode i tid. Definer vektoren $U^n = [U_1^n, \ldots, U_M^n]^T$, $h = 1/(M+1)$, og vis at differensemetoden oppfyller en rekurrensligning av typen

$$
U^{n+1} = CU^n, \qquad C \in \mathbf{R}^{M\times M}
$$

Bestem matrisen C.

b) La $r = k/h^2$ der k er tidsskrittet, $\alpha = \max\limits_{0\le x\le 1} a(x)$, og vis at metoden er stabil for skrittlengder som oppfyller

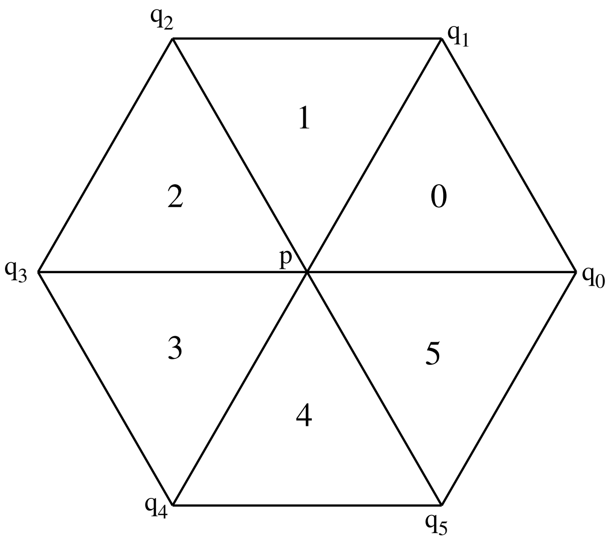
$$2\alpha r \le 1$$

Hint. Gershgorin's teorem.

Oppgave 2 I denne oppgaven skal du studere ulike aspekter ved endelig elementmetode anvendt på på Poisson-problemet med homogene randkrav

$$-\Delta u = f \quad (x,y) \in \Omega, \qquad u = 0 \quad (x,y) \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Anta at Ω kan deles opp i likeformede trekanter der alle sidekanter har lengde h. Et utsnitt av trekantnettet er gitt på figuren, der vi antar at alle $q_0 \dots, q_5$ er indre noder. De 6 trekantene T_j er på figuren merket med tallet j. Vi introduserer approksimasjonsrom $S_h \subset S$ som underrommet av S bestående av funksjoner som er lineære på hver trekant. Som basis for S_h bruker vi pyramidefunksjoner $\{\phi_p(x,y) : p \text{ indre node i } \Omega\}$. For utsnittet på figuren lager vi et lokalt koordinatsystem ved å sette



$$\xi = \frac{x - x_p}{h}, \qquad \eta = \frac{y - y_p}{h},$$

følgelig får hjørnene i sekskanten koordinater $(\pm 1, 0)$ og $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Vi definerer vektoren $\mathbf{z} = (\xi, \eta)$.

a) Formfunksjonene ψ_p^j, $j = 0, \dots, 5$, er basisfunksjonen ϕ_p restriktert til trekant T_j (se figuren). Bestem $\psi_p^0(\mathbf{z})$, $\psi_{q_0}^0(\mathbf{z})$ og $\psi_{q_1}^0(\mathbf{z})$.

b) Argumentér for at et fins en 2×2-matrise Q slik at

$$\begin{aligned}
\psi_p^{j+1}(\mathbf{z}) &= \psi_p^j(Q\mathbf{z}), \\
\psi_{q_{j+1}}^{j+1}(\mathbf{z}) &= \psi_{q_j}^j(Q\mathbf{z}), \\
\psi_{q_{j+1}}^{j}(\mathbf{z}) &= \psi_{q_j}^{j-1}(Q\mathbf{z}),
\end{aligned}$$

der vi pr definisjon setter $\psi_p^6(\mathbf{z}) := \psi_p^0(\mathbf{z})$, og $\psi_{q_6}^j := \psi_{q_0}^j$. Bestem Q og verifiser at den er ortogonal ($Q^T Q = I$) med determinant lik 1.

c) Bruk dette til å verifisere at

$$\int_{T_j} \left|\nabla \psi_p^j\right|^2 \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = \int_{T_0} \left|\nabla \psi_p^0\right|^2 \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

$$\int_{T_j} \nabla \psi_p^j \cdot \nabla \psi_{q_j}^j \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = \int_{T_0} \nabla \psi_p^0 \cdot \nabla \psi_{q_0}^0 \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

$$\int_{T_j} \nabla \psi_p^j \cdot \nabla \psi_{q_{j+1}}^j \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = \int_{T_0} \nabla \psi_p^0 \cdot \nabla \psi_{q_1}^0 \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

for $0 \le j \le 5$, og bestem de tre integralene.

d) Variasjonsformuleringen av (1) gir en bilineær form $a(u, v)$, $u, v \in S$. Bestem $a(\phi_p, \phi_p)$ og $a(\phi_p, \phi_{q_j})$, $0 \le j \le 5$, der ϕ_p, ϕ_{q_j} er pyramidefunksjonene sentrert hhv i p og q_j.

Oppgave 3 Vi ser på det hyperbolske problemet

$$u_t + a u_x = bu.$$

Lax-Wendroff's metode for denne ligningen er

$$U_m^{n+1} = (1 + bk + \frac{1}{2}(bk)^2)\, U_m^n - \frac{ap}{2}(1+bk)\,(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + \frac{(ap)^2}{2}\,\delta_x^2 U_m^n$$

der $p = k/h$ og k og h er skrittlengden i henholdsvis tid og rom.

a) Vis hvordan denne metoden kan utledes, for eksempel ved å benytte at $\partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u - 2ab\partial_x u + b^2 u$.

b) Utled et uttrykk for den lokale avbruddsfeilen τ_m^n, idet du tar hensyn til at en kan ha $a = 0$ eller $b = 0$. Som et minimum bør du ha et uttrykk av formen $\tau_m^n = \mathcal{O}(\cdots)$, men angi gjerne de prinsipale leddene i utviklingen.

c) La $\zeta = bk$, $r = ap$. Vis at metoden ovenfor er von Neumann stabil for alle ζ, r slik at

$$(1 + \zeta + \zeta^2/2)^2 + 4qr^2(\zeta + \zeta^2/2) + 4r^2q^2(r^2 - (1+\zeta)^2) \le 1, \quad \text{for alle } 0 \le q \le 1.$$

Hint. Parameteren q framkommer som $q = \sin^2 \frac{\beta h}{2}$ med vanlig notasjon for von Neumann stabilitet.

d) Vis at nødvendige betingelser for von Neumann stabilitet blir

$$-2 \le \zeta \le 0, \qquad r^2 \le 1 + \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{4}\zeta^2$$