TMA4212 Numerisk løsning av differensialligninger med differansemetoder

Øving 1

Oppgave 1. La $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ være en tridiagonal matrise med konstante diagonaler,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}$$

der $bc > 0$. La $D = \operatorname{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$. Vis at det fins (bestem) en α slik at $S = D^{-1}AD$ er symmetrisk. Hvordan ser S ut?

Oppgave 2. p-normen til en vektor i $x \in \mathbf{R}^n$ er gitt som

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Vis at dersom $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ så er den tilordnede matrisenormen til D gitt ved

$$\|D\|_p = \max_{1\le i\le n} |d_i| = \rho(D)$$

Oppgave 3.

a) La $\|\cdot\|$ være en vektornorm på $\mathbf{R}^n$, og la T være en inverterbar $n \times n$-matrise. Vis at da definerer også funksjonen

$$f_T(x) = \|T^{-1}x\|$$

en vektornorm på $\mathbf{R}^n$.

Vi setter dermed $\|x\|_T := f_T(x) = \|T^{-1}x\|$.

b) La oss definere matrisenormen tilordnet vektornormen $\|\cdot\|$ på vanlig måte ved

$$\|A\| = \sup_{0\neq x\in\mathbf{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Vis at matrisenormen tilordnet vektornormen $\|\cdot\|_T$ blir

$$\|A\|_T = \|T^{-1}AT\|$$

c) I timene har vi lært at spektralradien $\rho(A)$ til en matrise A oppfyller

$$\rho(A) \le \|A\|$$

for enhver matrisenorm $\|\cdot\|$. Anta nå at A er gitt (fiksert). Vis at det da, for enhver $\varepsilon > 0$, fins en matrisenorm $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ slik at

$$\|A\|_{A,\varepsilon} \le \rho(A) + \varepsilon$$

Hint. Bruk først Jordanformen til A for å modifisere p-norm slik som i **b)**. Modifiser denne normen videre ved å bruke en diagonalmatrise av samme form som i Oppgave 1.