TMA4212 Numerisk løsning av differensialligninger med differensemetoder

Løsning til Øving 1

Oppgave 1. *La $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ være en tridiagonal matrise med konstante diagonaler,*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}$$

der $bc > 0$. La $D = \operatorname{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$. Vis at det fins (bestem) en α slik at $S = D^{-1}AD$ er symmetrisk. Hvordan ser S ut?

Løsning. Merk først at $D^{-1} = \operatorname{diag}(1, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \ldots, \alpha^{-n+1})$. Vi ser at

$$S_{ij} = (D^{-1}AD)_{ij} = \alpha^{j-i} A_{ij}.$$

Dermed merker vi oss at S også blir tridiagonal, og dessuten blir diagonalen til S uforandret dvs $S_{ii} = A_{ii}$. Vi må kreve at $S_{i,i+1} = S_{i+1,1}$ det vil si

$$\alpha^1 b = \alpha^{-1} c \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \sqrt{\frac{c}{b}}$$

som går greit siden $bc > 0$. Vi får nå at $S_{i,i+1} = S_{i+1,i} = \sqrt{bc}$ og dermed blir S den tridiagonale symmetriske matrisen $S = \operatorname{trid}(\sqrt{bc}, a, \sqrt{bc})$.

Oppgave 2. *p-normen til en vektor i $x \in \mathbf{R}^n$ er gitt som*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Vis at dersom $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ så er den tilordnede matrisenormen til D gitt ved

$$\|D\|_p = \max_{1\le i\le n} |d_i| = \rho(D)$$

Løsning. Vi beregner for vilkårlig x

$$\|Dx\|_p = \left(\sum_i |d_i x_i|^p\right)^{1/p} \le \max_i |d_i| \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} = \rho(D)\|x\|_p$$

siden egenverdiene til en diagonalmatrisen fins på diagonalen. Dermed er det klart at $\|D\|_p \le \rho(D)$. Hvis $D = 0$ stemmer åpenbart resultatet, så anta $D \neq 0$. Anta at k er slik at $\max_i |d_i| = |d_k| = \rho(D) > 0$. Om vi velger

$$x = \frac{|d_k|}{d_k}\, e_k \quad \Rightarrow \quad \|Dx\|_p = |d_k| = \rho(D) = \rho(D)\,\|x\|_p$$

siden $\|x\|_p = 1$, så vi kan konkludere med at $\|D\|_p = \rho(D)$.

PS! Den siste delen av beviset der vi viser at ulikheten er skarp, kunne erstattes med det vi vet fra kurset om at for alle matrisenormer og for alle matriser gjelder at $\rho(A) \le \|A\|$.

Oppgave 3.

a) *La $\|\cdot\|$ være en vektornorm på $\mathbf{R}^n$, og la T være en inverterbar $n \times n$-matrise. Vis at da definerer også funksjonen*

$$f_T(x) = \|T^{-1}x\|$$

en vektornorm på $\mathbf{R}^n$.

Vi setter dermed $\|x\|_T := f_T(x) = \|T^{-1}x\|$.

Løsning. Vi må sjekke de tre aksiomene for normer, der vi uten videre kan anta at $\|\cdot\|$ tilfredsstiller disse

1. Åpenbart er $f_T(x) = \|T^{-1}x\| > 0$ og

$$f_T(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{-1}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

2.
$$f_T(\alpha x) = \|T^{-1}\alpha x\| = \|\alpha T^{-1}x\| = |\alpha|\,\|T^{-1}x\| = \alpha f_T(x)$$

3.
$$f_T(x+y) = \|T^{-1}(x+y)\| = \|T^{-1}x + T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}x\| + \|T^{-1}y\| = f_T(x) + f_T(y)$$

b) *La oss definere matrisenormen tilordnet vektornormen $\|\cdot\|$ på vanlig måte ved*

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbf{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Vis at matrisenormen tilordnet vektornormen $\|\cdot\|_T$ blir

$$\|A\|_T = \|T^{-1}AT\|$$

Løsning. Vi bruker definisjonen av tilordnet norm

$$\|A\|_T = \sup_{0 \neq x \in \mathbf{R}^n} \frac{\|Ax\|_T}{\|x\|_T} = \sup_{0 \neq x \in \mathbf{R}^n} \frac{\|T^{-1}Ax\|}{\|T^{-1}x\|}$$

Nå setter vi $y = T^{-1}x$ og merker oss at når x løper gjennom hele $\mathbf{R}^n$ unntatt 0 vil også y gjøre dette. Så vi kan ta sup over y istedet og får da

$$\|A\|_T = \sup_{0 \neq y \in \mathbf{R}^n} \frac{\|T^{-1}ATy\|}{\|y\|} = \|T^{-1}AT\|$$

c) *I timene har vi lært at spektralradien $\rho(A)$ til en matrise A oppfyller*

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

for enhver matrisenorm $\|\cdot\|$. Anta nå at A er gitt (fiksert). Vis at det da, for enhver $\varepsilon > 0$, fins en matrisenorm $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ slik at

$$\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Hint. *Bruk først Jordanformen til A for å modifisere p-norm slik som i* ***b)****. Modifiser denne normen videre ved å bruke en diagonalmatrise av samme form som i Oppgave 1.*

Løsning. Vi vet allerede fra timene at A har faktoriseringen $A = TJT^{-1}$ der J er Jordanformen til A. Vi vet fra ovenfor at hvis $\|\cdot\|$ er en matrisenorm så vil $\|A\|_T = \|T^{-1}AT\| = \|J\|$ også være en norm. Jordanformen J har A sine egenverdier på diagonalen, og (muligens) noen 1'ere på første subdiagonal ovenfor hoveddiagonalen.

La oss nå lage normen

$$\|A\|_{TD} = \|D^{-1}T^{-1}ATD\| = \|D^{-1}JD\|$$

der D er diagonalmatrisen

$$D = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}), \quad \varepsilon > 0.$$

Analogt med den første oppgaven får vi da at $(D^{-1}JD)_{ii} = J_{ii}$ mens $(D^{-1}JD)_{i,i+1} = \varepsilon \, J_{i,i+1}$ der vi husker at $J_{i,i+1}$ er enten 0 eller 1. Alle de øvrige elementer i $(D^{-1}JD)$ er null. La oss nå velge den opprinnelige normen $\|\cdot\| := \|\cdot\|_1$ dvs maks kolonnesum. Fra det vi har sett blir altså

$$\|A\|_{TD} = \|D^{-1}JD\|_1 \leq \rho(A) + \varepsilon$$

så vår $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ velges som $\|A\|_{TD}$.