TMA4212 Numerisk løsning av differensialligninger med differansemetoder

Øving 2

Oppgave 1. Skriv et program i MATLAB som løser følgende problem med Crank–Nicolsons metode

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,t) = \begin{cases} 10t, & 0 \le t \le 0.1 \\ 1, & t > 0.1 \end{cases}$$

$$u(1,t) = 0$$

Du kan bruke skrittlengder $h = 0.1$ og $k = 0.01$ opp til $t = 0.1$ og $k = 0.1$ derfra.

Ta for gitt at eksakt løsning $u(x,t)$ nærmer seg en stasjonær verdi $u_\infty(x)$ når t øker. Finn $u_\infty(x)$. Undersøk ved å studere resultatene fra programmet om numerisk løsning U_m^n nærmer seg $u_\infty(x_m)$ når n øker. Kan du vurdere feilen i den numeriske løsningen?

Oppgave 2. Når en modellerer et fysisk problem starter en ofte med elementbetraktninger og ved å la elementstørrelsene gå mot null oppnår man en partiell differensialligning. På et vis er dette en reversert utgave av numerisk løsning av en PDL. La oss se på et slikt eksempel.

Vi ser på varmebalanse i en tynn stav med lengde L og varierende tverrsnitt $F(x)$. Vi deler inn staven i M biter langs lengdeaksen x hver med lengde $h = L/M$. Vi danner volumelementer, hvert avgrenset av tverrsnittene ved $x_{m\pm1/2} = (m\pm1/2)h$ (lag tegning). Vi antar at temperaturen $T_m(t)$ er konstant over elementet. I varmebalansen for et slikt element inngår transport av varme til/fra naboelementene og varmetransport mot luften omkring. Vi antar at staven har tetthet ρ, spesifikk varmekapasitet c, konduktivitet λ og konveksjonskoeffisient α mot luft, alt uavhengig av x. Stavens omkrets $R(x)$, temperatur i endene T_v og T_h, starttemperaturen samt lufttemperatur T_A antas å være kjent. Vi setter $F_{m\pm1/2} = F(x_{m\pm1/2})$ og $R_m = R(x_m)$. Varmebalansen for elementet blir nå tilnærmet:

$$\begin{aligned}\rho c \tfrac{h}{2}(F_{m+1/2} + F_{m-1/2})\tfrac{dT_m}{dt} = \; & -\underbrace{\lambda F_{m-1/2}(T_m - T_{m-1})/h}_{\text{fluks ved } x_{m-1/2}} + \underbrace{\lambda F_{m+1/2}(T_{m+1} - T_m)/h}_{\text{fluks ved } x_{m+1/2}} \\ & -\underbrace{\alpha h R_m (T_m - T_A)}_{\text{varme til luft}}\end{aligned}$$

Vi har her brukt $\frac{h}{2}(F_{m+1/2} + F_{m-1/2})$ som tilnærmelse til volumet av elementet og hR_m som tilnærmelse til elementets areal mot luften omkring. Med $m = 1, \dots, M-1$ får vi et system av ordinære differensialligninger for $T_m(t)$. Disse ligningene kan betraktes som en semidiskretisering av en partiell differensialligning for en funksjon $T(x,t)$. Din oppgave blir å finne denne ligningen.

Oppgave 3. Holder følgende tankegang?

$$\begin{aligned}\partial_t u = \partial_x^2 u \quad &= \tfrac{1}{h^2}\delta_x^2 u - \tfrac{1}{12}h^2\partial_x^4 u + \mathcal{O}(h^4) \\ &= \tfrac{1}{h^2}\delta_x^2 u - \tfrac{1}{12}h^2\partial_x^2\partial_t u + \mathcal{O}(h^4) \\ &= \tfrac{1}{h^2}\delta_x^2 u - \tfrac{1}{12}\delta_x^2\partial_t u + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

og dermed

$$(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)\partial_t u = \frac{1}{h^2}\delta_x^2 u + \mathcal{O}(h^4)$$

så ved bruk av trapes

$$(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)(u_m^{n+1} - u_m^n) = \frac{k}{2h^2}(\delta_x^2 u_m^n + \delta_x^2 u_m^{n+1}) + \mathcal{O}(kh^4) + \mathcal{O}(k^3)$$

I så fall er

$$\left(1 + (\frac{1}{12} - \frac{r}{2})\delta_x^2\right) U_m^{n+1} = \left(1 + (\frac{1}{12} + \frac{r}{2})\delta_x^2\right) U_m^n$$

(der $r = k/h^2$) en differensformel med avbruddsfeil $\mathcal{O}(k^3 + kh^4)$. Beregn hovedleddet i avbruddsfeilen.

Oppgave 4. Beregn avbruddsfeilen i

$$\frac{1}{h^2}\delta\,(a(x)\cdot\delta\,u(x))$$

som tilnærmelse til $(a(x)u'(x))'$.