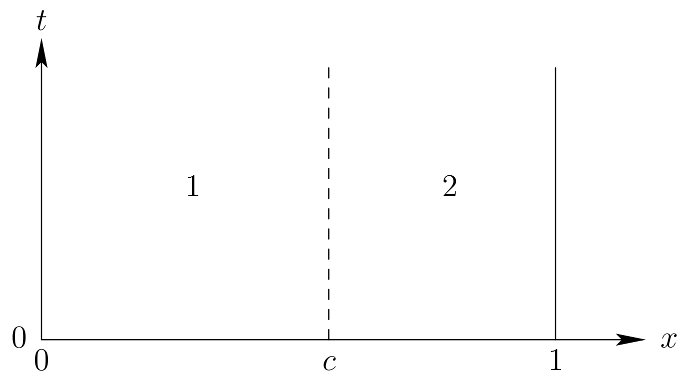
TMA4212 Numerisk løsning av differensialligninger med differansemetoder

Øving 3

Oppgave 1.



Vi har varmeledning i en plate sammensatt av to materialer. Finn en løsningsmetode for følgende problem:

$$
\begin{array}{ll}
u_t^1 = a_1 u_{xx}^1, \quad 0 < x < c,\ t > 0, & u^1(x,0) = f_1(x),\ 0 \le x \le c \\
u_t^2 = a_2 u_{xx}^2, \quad c < x < 1,\ t > 0, & u^2(x,0) = f_2(x),\ c < x \le 1 \\
u^1(0,t) = g_0(t),\ t > 0, & u^2(1,t) = g_1(t),\ t > 0 \\
u^1(c,t) = u^2(c,t),\ t > 0, & \lambda_1 u_x^1(c,t) = \lambda_2 u_x^2(c,t),\ t > 0
\end{array}
$$

Oppgave 2. Sjekk om formelen din fra Oppgave 1 fungerer ved å implementere den i MATLAB med $c = 1/2$ og

$$f_1(x) = 4x(1-x),\ f_2(x) = 4x(1-x),\ a_1 = 1,\ a_2 = 100,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ g_0 \equiv g_1 \equiv 0$$

Oppgave 3. La r være et positivt reelt tall. Vis at dersom $U = (U_1, \dots, U_M)^T$ oppfyller

$$
\begin{aligned}
&-rU_{m-1} + (1+2r)U_m - rU_{m+1} = v_m, \quad 1 \le m \le M-1 \\
&U_0 = U_M = 0
\end{aligned}
$$

gjelder

$$\max_{0 \le m \le M} |U_m| \le \max_{1 \le m \le M-1} |v_m|$$

Bruk dette til å vise at Baklengs Euler konvergerer for vilkårlig $r = k/h^2$ på problemet

$$u_t = u_{xx},\ u(x,0) = f(x),\ u(0,t) = g_0(t),\ u(1,t) = g_1(t)$$

Oppgave 4. Finn stabilitetskrav for Eulers metode anvendt på

$$u_t = u_{xx} + \beta u \quad \text{og} \quad u_t = u_{xx} - \beta u, \quad \beta > 0$$

med vanlige randkrav ($u(x,0),\ u(x,1),\ u(0,x)$ gitt).