TMA4212 Numerisk løsning av differensialligninger med differansemetoder

Øving 4

Oppgave 1. En differensialligning har løsning $u(x, y)$ på et rektangel i (x, y)-planet. Anta at denne løsningen approksimeres på et gitter (x_m, y_n), $x_m = mh$, $y_n = nk$ ved at $U_{m,n} \approx u(x_m, y_n)$ oppfyller differenseformelen

$$a\,U_{m+1,n+1} + b\,U_{m-1,n+1} + c\,U_{m+1,n-1} + d\,U_{m-1,n-1} + e\,U_{m,n} = 0, \quad 1 \leq m \leq M,\ 1 \leq n \leq N,$$

der a, b, c, d, e er konstanter som avhenger av skrittlengdene h og k. En bruker randverdier $U_{m,n} = g(x_m, y_n)$ hvis $m = 0, m = M + 1, n = 0, n = N + 1$.

a) Tegn beregningsmolekylet for denne formelen.

b) Antallet ukjente er $M \cdot N$. Definer en kolonne-vektor av de ukjente $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{M \cdot N}$

$$\mathbf{U} = (U_{1,1}, \ldots, U_{M,1}, U_{1,2}, \ldots, U_{M,2}, \ldots, \ldots, U_{M,N})^T$$

Bestem matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$ slik at differenseligningen ovenfor kan formuleres som

$$A\,\mathbf{U} = \mathbf{b}$$

c) Hvis $M = N = 1000$, hvor mange prosent (høyst) av matriselementene i A er forskjellig fra null?

d) Finn ut hva slags MATLAB-kode som genererer A, unngå mellom- eller sluttlagring av mange 0-elementer. Dette delspørsmålet kan du gjøre direkte på datamaskinen.

Hint. Undersøk funksjonene `speye`, `spdiags`, `kron`, en eller flere av disse kan typisk brukes.

e) La oss nå bytte ut rektanglet med et L-formet område som på figuren. Vi antar at $M = N =$ odde ($h = k = 1/(M+1)$) og fremdeles at løsningen er gitt på randen av området. Nummerer fremdeles gitterpunktene linje for linje. Forsøk nå å gjenta **b)**, **c)** og **d)**.

f) Finn eventuelt verdier av a, b, c, d, e slik at differenseligningen approksimerer løsningen av

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$