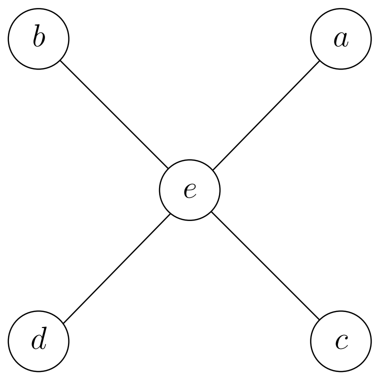
TMA4212 Numerisk løsning av differensialligninger med differensemetoder

Løsning til Øving 4

Oppgave 1. a)



Figur 1: Beregningsmolekyl for den oppgitte metoden.

Se figur 1.

b) Det første vi umiddelbart ser er at e vil sitte på diagonalen. Vi vil ha to subdiagonaler hvor d og c sitter plassert henholdsvis $M+1$ og $M-1$ under hoveddiagonalen. På samme måte vil vi ha to superdiagonaler som svarer til a og b plassert henholdsvis $M+1$ og $M-1$ over hoveddiagonalen. Verdiene i vektoren $\underline{b}$ vil stort sett være 0, bortsett fra i de punktene hvor vi har koblinger til rendene (hvor vi har oppgitte verdier). Her vil også verdiene på diagonalene forsvinne.

For å gjøre det enklere å illustere strukturen på $\underline{A}$ og $\underline{b}$ lar vi nå $M = N = 3$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} e & & & & a & & & & \\ & e & & b & & a & & & \\ & & e & & b & & & & \\ & c & & e & & & & a & \\ d & & c & & e & & b & & a \\ & d & & & & e & & b & \\ & & & & c & & e & & \\ & & & d & & c & & e & \\ & & & & d & & & & e \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -bg_{0,1} - cg_{1,0} - dg_{0,0} \\ -cg_{3,0} - dg_{1,0} \\ -ag_{4,2} - cg_{4,0} - dg_{2,0} \\ -bg_{0,3} - dg_{0,1} \\ 0 \\ -ag_{4,3} - cg_{4,1} \\ -ag_{2,4} - bg_{0,4} - dg_{0,2} \\ -ag_{3,4} - bg_{1,4} \\ -ag_{4,4} - bg_{2,4} - cg_{4,2} \end{pmatrix}$$

Vi ser at vi har en blokkdiagonal matrise. (Hvis du ikke er overbevist, del inn matrisen i $3x3$ blokker, undertegnede fikk ikke LaTeXtil å høre etter).

c) Vi har (sånn ca) fem elementer per rad mens vi har 1000^2 ukjente $\Rightarrow$ Dette gir en fyllrate på

$$\frac{5}{1000^2} \cdot 10^2\% = 5 \cdot 10^{-4}\%,$$

forsvinnende få med andre ord. Lagring av 0 ville vært fryktelig kostbart og veldig bortkastet.

d) Kronecker-produktet erstatter et element i en matrise med en annen matrise multiplisert med elementverdien. Dette kan vi utnytte når vi har blokkdiagonale operatorer slik som vi har nå. Vi starter med to matriser på formen (nok en gang bruker jeg $M = N = 3$ for å illustrere)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Tar vi nå Kroneckerproduktet av den første matrisen med den andre får vi matrisen

$$\begin{pmatrix} & & & & a & & & & \\ & & & b & & a & & & \\ & & & & b & & & & \\ & & & & & & & a & \\ & & & & & & b & & a \\ & & & & & & & b & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

På samme måte kan vi konstruere den nedretriangulære delen ved å ta Kroneckerproduktet av matrisene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ d & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Tar vi summen av disse to Kroneckerproduktene er alt vi mangler e langs hoveddiagonalen. Denne legger vi enkelt til ved et kall til *spdiags*. Koden for å sette opp operatoren er gjengitt under.

```
function svar = lagA(M,N,a,b,c,d,e)
% v1 = [zeros(1,M+1) repmat([a*ones(1,M-1) 0],1,N)]';
% v2 = [zeros(1,M-1) repmat([0 b*ones(1,M-1)],1,N)]';
% v3 = [repmat([0 c*ones(1,M-1)],1,N) zeros(1,M-1)]';
% v4 = [repmat([d*ones(1,M-1) 0],1,N) zeros(1,M+1)]';

% svar = e*speye(M*N)...
% +spdiags(v1,M+1,M*N,M*N)...
% +spdiags(v2,M-1,M*N,M*N)...
% +spdiags(v3,-(M-1),M*N,M*N)...
% +spdiags(v4,-(M+1),M*N,M*N);

% solution with kron
B1 = spdiags([d*ones(M,1) c*ones(M,1)],[-1 1],M,M);
B2 = spdiags([b*ones(M,1) a*ones(M,1)],[-1 1],M,M);
C1 = spdiags(ones(N,1),1,N,N);
C2 = spdiags(ones(N,1),-1,N,N);

svar = kron(C1,B1)+kron(C2,B2)+speye(N*M)*e;
```

e) Matrisestrukturen blir forholdsvis lik, men den blir mer grisete å sette opp pga de varierende posisjonene til diagonalene. Fyllraten blir ikke spesielt mye bedre, her bruker vi 1001 siden 1000 ikke er et odde tall.

$$\frac{5}{500 \cdot 1001 + 501 \cdot 500} = 6.67 \cdot 10^{-4}\%$$

```
function svar = lagAL(M,a,b,c,d,e)
N1 = ((M-1)/2)*M; % number of unknowns in the lower half
N2 = ((M+1)/2)*(M-1)/2; % number of unknowns in the upper quarter
N = N1+N2; % total number of unknowns

v1 = [zeros(1,M+1) repmat([a*ones(1,M-1) 0],1,N1/M-1) zeros(1,N2-(M+1)+M)]'  % lower half ne
v2 = [zeros(1,M-1) repmat([0 b*ones(1,M-1)],1,N1/M-1) zeros(1,N2-(M-1)+M)]'; % lower half nw
v3 = [repmat([0 c*ones(1,M-1)],1,N1/M) zeros(1,N2)]'; % lower half se
v4 = [repmat([d*ones(1,M-1) 0],1,N1/M) zeros(1,N2)]'; % lower half sw

v5 = [zeros(1,N1) repmat([a*ones(1,(M-1)/2-1) 0],1,(M+1)/2-1) zeros(1,(M-1)/2)]'; % upper quarter ne
v6 = [zeros(1,N1) repmat([0 b*ones(1,(M-1)/2-1)],1,(M+1)/2-1) zeros(1,(M-1)/2)]'; % upper quarter nw
v7 = [zeros(1,N1) repmat([0 c*ones(1,(M-1)/2-1)],1,(M+1)/2)]' % upper quarter se
v8 = [zeros(1,N1+(M-1)/2) repmat([d*ones(1,(M-1)/2-1) 0],1,(M+1)/2-1)]'; % lower half sw
v9 = [zeros(1,N1) d*ones(1,(M-1)/2-1) zeros(1,N2-((M+1)/2-1))]' % lower border sw

svar =  e*speye(N)...
        +spdiags(v1,M+1,N,N)...
        +spdiags(v2,M-1,N,N)...
        +spdiags(v3,-(M-1),N,N)...
        +spdiags(v4,-(M+1),N,N)...
        +spdiags(v5,(M+1)/2,N,N)...
        +spdiags(v6,(M-1)/2-1,N,N)...
        +spdiags(v7,-((M-1)/2-1),N,N)...
        +spdiags(v8,-(M+1)/2,N,N)...
        +spdiags(v9,-((M+1)/2),N,N);
```

f) På tide å ty til vår venn Taylor. Vi utvikler hvert ledd om $U_{m,n}$ til og med andre ordens deriverte. Her vil superskript betegne deriverte.

$$
\begin{aligned}
aU_{m+1,n+1} &= a\left(U_{m,n+1} + hU^{x}_{m,n+1} + \frac{h^2}{2}U^{xx}_{m,n+1}\right)\\
&= a\left(U_{m,n} + kU^{y}_{m,n} + \frac{k^2}{2}U^{yy}_{m,n}\right)\\
&+ ah\left(U^{x}_{m,n} + kU^{xy}_{m,n}\right)\\
&+ \frac{ah^2}{2}\left(U^{xx}_{m,n}\right)\\
bU_{m-1,n+1} &= b\left(U_{m,n+1} - hU^{x}_{m,n+1} + \frac{h^2}{2}U^{xx}_{m,n+1}\right)\\
&= b\left(U_{m,n} + kU^{y}_{m,n} + \frac{k^2}{2}U^{yy}_{m,n}\right)\\
&- bh\left(U^{x}_{m,n} + kU^{xy}_{m,n}\right)\\
&+ \frac{bh^2}{2}\left(U^{xx}_{m,n}\right)\\
cU_{m+1,n-1} &= c\left(U_{m,n-1} + hU^{x}_{m,n-1} + \frac{h^2}{2}U^{xx}_{m,n-1}\right)\\
&= c\left(U_{m,n} - kU^{y}_{m,n} + \frac{k^2}{2}U^{yy}_{m,n}\right)\\
&+ ch\left(U^{x}_{m,n} - kU^{xy}_{m,n}\right)\\
&+ \frac{ch^2}{2}\left(U^{xx}_{m,n}\right)\\
dU_{m-1,n-1} &= d\left(U_{m,n-1} - hU^{x}_{m,n-1} + \frac{h^2}{2}U^{xx}_{m,n-1}\right)\\
&= d\left(U_{m,n} - kU^{y}_{m,n} + \frac{k^2}{2}U^{yy}_{m,n}\right)\\
&- dh\left(U^{x}_{m,n} - kU^{xy}_{m,n}\right)\\
&+ \frac{dh^2}{2}\left(U^{xx}_{m,n}\right)
\end{aligned}
$$

Vi samler nå koeffisientene foran like deriverte og forlanger at alle ledd bortsett fra $U^{xx}_{m,n}$ og $U^{yy}_{m,n}$ forsvinner. For de to andre ordens leddene krever vi at koeffisientene summeres opp til 1. Dette gir ligningssystemet

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
1 & -1 & 1 & -1 & 0\\
1 & -1 & -1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}
$$

som har løsning $a = b = c = d = \frac{1}{4}, e = -1$.