TMA4212 Numerisk løsning av differensialligninger med differansemetoder

Øving 5

Oppgave 1. En differensligning har formen

$$AU^{n+1} = BU^n + d^n$$

og avbruddsfeilen τ^n er definert ved

$$Au^{n+1} = Bu^n + d^n + \tau^n$$

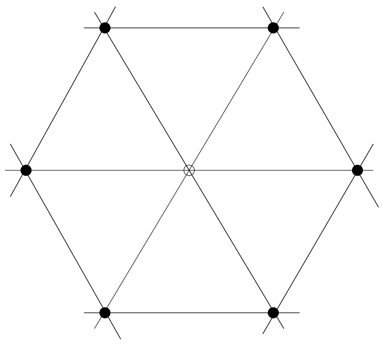
Vis at diskretiseringsfeilen $e^n = u^n - U^n$ kan skrives

$$e^n = v^{n-1} + Cv^{n-2} + \cdots + C^{n-2}v^1 + C^{n-1}v^0$$

hvor $C = A^{-1}B,\ v^l = A^{-1}\tau^l$, og vi har antatt $e^0 = \mathbf{0}$. Anta at $\|C^n\| \le L$ for alle n og vis at

$$\|e^n\| \le T \cdot L \cdot \max_{l \le T/k} \|\frac{1}{k} v^l\| \quad \text{for enhver } n \le T/k.$$

Oppgave 2. Finn en diskretisering av Laplace-operatoren ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$) på et heksagonalt gitter dvs sammensatt av likesidete trekanter (se figur). Angi første ledd i utviklingen av avbruddsfeilen. *Hint:* Bruk symmetri.



Oppgave 3. Finn en eller flere differensapproksimasjoner til $\partial_x \partial_y u$ på et rektangulært gitter med samme skrittlengde i begge retninger.

Oppgave 4. Diskretiser $\Delta u = f$ i P med betingelsen $\partial_n u + au = g$ langs skrålinjen γ (se figur) ved hjelp av boksintegrasjon.