TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2009

Øving 5

Oppgave 1

Kuttas metode fra 1901 er den mest berømte av alle eksplisitte Runge–Kutta-par, gitt ved følgende Butcher-tabell:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

a) Verifiser at metoden har orden 4 ved å sjekke alle de 8 ordensbetingelsene.

b) En besnærende tanke er nå å finne et nytt sett med vekter, si $\hat{b}_s$ slik at den tilhørende metoden får orden 3, til bruk for feilestimering og skrittlengdekontroll. Forsøk å finne et slikt sett med $\hat{b}_s$.

Oppgave 2

a) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med s nivåer maksimalt kan være av orden s. (Hint: Bruk $y' = y$, $y(0) = y_0$ som testligning.)

b) Vis at en eksplisitt Runge–Kutta-metode med 3 nivåer av orden 3 må oppfylle

$$3a_{32}c_2^2 - 2a_{32}c_2 - c_2c_3 + c_3^2 = 0.$$

c) Karakteriser alle eksplisitte Runge–Kutta-metoder med 3 nivåer av orden 3 som oppfyller $a_{31} = 0$, dvs. $a_{32} = c_3$. Hvor mange frie parametre fins?

d) Bestem alle eksplisitte metoder av orden 2 som har samme koeffisienter a_{ij} som metoden ovenfor, og vekter som samtidig oppfyller $\hat{b}_3 = 0$.

Oppgave 3

Implementer en adaptiv Runge–Kutta-metode basert på Bogacki–Shampine-paret:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
3/4 & 0 & 3/4 & & \\
1 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & \\
\hline
 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & 0 \\
\hline
 & 7/24 & 1/4 & 1/3 & 1/8
\end{array}
$$

Bruk pessimistfaktor $P = 0.9$.

Test programmet på Lotka–Volterra-ligningen (se notat). Lag et plott av løsningen og av skrittlengdene h_n. Varierer h_n som forventet?

Relevante eksamensoppgaver:

- Desember 2003, oppgave 1,
- August 2005, oppgave 3,
- Desember 2006, oppgave 3,
- Desember 2008, oppgave 4.