TMA4215 Numerisk matematikk

Høst 2009

Øving 6

Oppgave 1

Butcher-tablået for Bogacki–Shampine-par ble oppgitt i øving 5. Finn stabilitetsfunksjonene for de to metodene. Plott stabilitetsområdet ved hjelp av MATLAB-funksjonen `stab.m`.

Oppgave 2

a) Finn egenverdiene til matrisa

$$M = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 40 & -10 \end{pmatrix}.$$

b) Anta at du skal løse differensialligningen

$$y' = My, \qquad y(0) = y_0$$

ved hjelp av forbedret Eulers metode. Hva er den største skrittlengden $h_{\max}$ du kan bruke?

c) Løs ligningen

$$y' = My + g(t), \qquad 0 \le t \le 10$$

med

$$g(t) = \big(\sin(t), \cos(t)\big)^{\mathrm{T}}, \qquad y(0) = \left(\frac{5210}{249401}, \frac{20259}{249401}\right)^{\mathrm{T}}$$

ved bruk av `impEuler.m`. Velg skrittlengder litt mindre enn og litt større enn $h_{\max}$. Hva observerer du?

Oppgave 3

a) Gitt en kollokasjonsmetode som beskrevet i notatet. Vis at polynomet $u(t)$ som tilfredsstiller kollokasjonsbetingelsene

$$\begin{aligned} u'(t_n + c_i h) &= f\big(t_n + c_i h, u(t_n + c_i h)\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, s, \\ u(t_n) &= y_n, \end{aligned}$$

kan skrives som

$$u(t_n + \theta h) = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i(\theta) k_i, \qquad \theta \in [0, 1].$$

b) Finn kollokasjonsmetoden basert på nodene $c_1 = 1/3$ og $c_2 = 1$. Bestem metodens orden og finn stabilitetsfunksjonen.

Hva blir $b_1(\theta)$ og $b_2(\theta)$?

Vi har definert en metode som A-stabil dersom $|R(z)| \leq 1$ for alle $z \in \mathbb{C}^-$. Stabilitetsfunksjonen R er alltid en rasjonal funksjon, dvs. $R(z) = P(z)/Q(z)$ der P og Q er polynomer i z. Ved bruk av maksimum modulus-prinsippet er det er det mulig å vise at en metode er A-stabil hvis og bare hvis

1. $R(z)$ ikke har poler i $\mathbb{C}^-$ (polene er det samme som nullpunktene til $Q(z)$),
2. $|R(y\mathrm{i})|^2 \leq 1$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

c) Vis at kollokasjonsmetoden fra **b)** er A-stabil. Plott stabilitetsområdet.

d) Sett opp systemet av ikke-lineære ligninger som må løses for å ta et skritt med denne metoden anvendt på van der Pols ligning.

Oppgave 4

Bare for moro skyld!

Den linære testligningen

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = y_0$$

har løsningen $y(h) = \mathrm{e}^z y_0$ der $z = \lambda h$. Et skritt med en Runge–Kutta-metode gir $y_1 = R(z) y_0$. Dermed kan vi betrakte stabilitetsfunksjonen $R(z)$ som en tilnærmelse til e^z. Vil $R(z)$ vokse (i absoluttverdi) raskere enn e^z? Dette kan vi finne ut ved å studere når $|R(z)/\mathrm{e}^z| > 1$.

Skriv om skriptet `stab.m` til å plotte området

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)/\mathrm{e}^z| > 1\}.$$

Finn $\mathcal{A}$ for stabilitetsfunksjonene du har funnet i denne øvingen og i notatet. Du kan også tegne det for stabilitetsfunksjonene for Gauss–Legendre-metodene (kollokasjonsmetoder av orden $2s$). Disse er gitt ved:

$$\begin{aligned}
s &= 1, \qquad R(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}, \\
s &= 2, \qquad R(z) = \frac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12}, \\
s &= 3, \qquad R(z) = \frac{1 + z/2 + z^2/10 + z^3/120}{1 - z/2 + z^2/10 - z^3/120}.
\end{aligned}$$

Området $\mathcal{A}$ kalles en *ordensstjerne.*